

I. H. LAMBERT
ACADEMIAE SCIENTIARVM ELECTORALIS BOICAE, ET SOCIETATIS PHYSICO-MEDICAE BASILIENSIS MEMBRI, REGIAE SOCIETATI SCIENTIARUM GOETINGENSI COMMERCIO LITERARIO ADIVNCTI

PHOTOMETRIA

SIVE

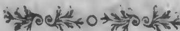
DE

MENSVRA ET GRADIBVS LVMINIS, COLORVM ET VMBRAE.





AUGUSTAE VINDELICORUM,
Sumptibus VIDVAE EBERHARDI KLETT
Typis CHRISTOPHORI PETRI DETLEFFSEN.
MDCCLX.





PRAEFATIO.

Quo una fidem datam & liberatam inter ſe conferre Lectores poſſint, verba ipſa, quibus me ad edendum hoc Photometriae tentamen in praefamine tractatus *Les proprietés remarquables de la route de la lumiere par les airs &c.* obſtrinxi, ipſi tractationi praefigenda duxi. Ita vero ſonant:

L'autre partie de l'Optique, dont j'ai principa ement deſſin de parler, c'eſt la Photometrie. *Elle s'occupe de l'eclat de la lumiere, de ſa denſité, de ſa force illuminante, de ſes modifications dans les couleurs & dans l'ombre, de ſes degrés, des accroiſſement & diminutions, qu'elle ſouffre dans tous les cas. Si la premiere partie de l'Optique a eté d'un ſecours infini, pour corriger les défauts de la vüe, pour rectifier les jugemens des yeux, pour démêler les aparences d'avec la verité; pour nous faire connoitre des mondes, que la nature ſembloit avoir voulu nos cacher, en les éloignant audela de la portée de notre vuë; ou en les rendant imper-*

ceptibles par leur petitesse, il faut dire, que notre connoissance de la lumiere elle méme n'en a pas eté fort perfectionnée. Le Photometrie y contribue infiniment plus. Qui veut imaginer une théorie de la lumiere, il ne lui suffira pas de savoir, qu'elle se se reflechit & se brise suivant une certaine loi: mais il lui importera, d'en pouvoir déduire la quantité de l'une & de l'autre conformement aux experiences.

La Photometrie n'est pas un païs entierement inculte. Des savans fort célebres y ont travaillé. Mr. Bouguer *en a donné un trés bel Essay sur la Gradation de la lumiere. Il la fait passer par plusieurs vitres, par l'eau par l'athmosphere. Il en cherche l'affoiblissement. Il s'en sert pour la célebre experience sur la comparaison de la clarté du Soleil & de la Pleine-Lune. Mr.* Euler *a encore donné nouvellement une Dissertation sur les différens degrés de la lumiere des Astres; & on trouve dans plusieurs Optiques des recherches, qui ont du rapport à la Photometrie, & en particulier dans celle de Mrs.* Smith *&* Kaestner.

Tous ces Essais sont des parties détachées d'un tout, dont il paroit qu'on est encore fort éloigné. Aussi n'en doit on pas être surpris. Rien de plus difficile, que la mesure de la lumiere, lorsquon veut la poursuivre dans toutes

ses

ſes modifications & dans tous les Phénomênes, qu'elle nous offre. Si les principes pour trouver les routes de la lumiere etoient aiſés & ſimples, ſi les bords de l'ombre ou des raïons attenués, qui entroient dans une chambre obſcure, les marquoient viſiblement, il s'en faut de beaucoup, que ceux, dont on a beſoin pour la Photometrie le ſoient auſſi. Il arrive rarement ou jamais, qu'on les voïe ſeuls, & il faut nombre d'expériences, pour les dégager des circonſtances accidentelles dans lesquelles ils ſont toujours envelopés.

Cette Science nous manquant donc presque entierement & etant d'ailleurs fort curieuſe, je me propoſe d'en donner un eſſai au public, lequel ſans être complet ne laiſſera pas d'être aſſer détaillé.

On y trouvera la ſuite d'experiences, qu'il m'avoit falu faire, pour déterminer la quantité de la lumiere reflechie & briſée ſur la ſurface exterieure & interieure du verre ſous chaque obliquité d'incidence. J'ai taché d'un autre côté, d'y appliquer un calcul, que les expériences ne démentiſſent point. On ſait que c'eſt juſtement ce qui reſtoit de plus inexplicable dans la théorie de la lumiere, & on pouvoit croire avec quelque droit, qu'une théorie, qui expliqueroit ce phénomêne & qui fourniroit les principes

pour les calculs, ne pouvoit qu'être extrêmement aprochante de la véritable. J'applique ces mêmes Experiences a plusieurs verres, & par là j'obtiens pour chaque angle d'incidence, ce que Mr. Bouguer *avoit cherché pour les angles droits. Je traite de la diminution de la lumiere, qui passe par l'athmosphere, sans avoir besoin de quelque hypothese physique.* On y *trouvera la théorie de l'intensité de la lumiere directe & la clarté des objets illuminés, comparée à celle de la lumiere, qui les illumine, la clarté des images dans les foiers d'un verre caustique comparée à celle des objets mêmes, par théorie & par experience, en faisant entrer dans le calcul la quantité de lumiere, que les surfaces du verre reflechissent. L'Illumination du systeme planetaire, & la clarté des planètes & de leurs phases vues de la terre, leur force illuminante &c. Cette theorie n'est point du tout une copie de celle de* Mr. Euler. *Elle part de principes différens & plus détaillés, & repond parfaitement à l'expérience de* Mr. Bouguer *pour la clartè de la Lune comparée à celle du Soleil, que le calcul de* Mr. Euler *donna plus petite contre son atente, & que* Mr. Smith *trouva plus grande par le sien. Les differens dégrés de l'ombre & leur mesure. Des instrumens pour déterminer le degré de la clarté des*

couleurs

couleurs & de leur melange. La clarté des objets en tant qu'elle depend de l'ouverture de la pupille &c.

Voici quelques ſujets que je traite dans ma Photometrie ſimplement indiqués. Pour donner quelque idée du tout, je dirai, que quant aux matieres, que l'on trouve déja dans d'autres livres, ce que j'en dirai, en differera, comme le preſent traité differe de ceque d'autres Auteurs ont trouvé ſur les refractions aſtronomiques, & que pour celles, qui ſont toutes nouvelles, ne trouvant à les comparer qu'aux experiences, il ſuffira de dire, qu'elles auront leur ſuffrage.

Quodſi promiſſa haec ab aequis Lectoribus cum ipſo opere conferantur, facile experiri ipſis licebit, quatenus iis ſteterim. Vnam forſan theoriam illuminationis corporum opacorum ex parte ſuppreſſam iudicabunt. Mutatae vero ſententiae rationem ſi quis ex me quaerat, haud deſunt, quae monenda habeo. Theoriam iſtam, quam potiſſimum in Cap. II. P. III. euolutam dedi, eatenus tantum retinui, quatenus non modo ſtrictiorem eam admittere videbam demonſtrationem, verum & vel maxime, quatenus inde deduci poterat experimentorum iſtorum ratio, quibus corporum albedo, eorumque color, & quantitates luminis ab iſtis reflexi, a poſteriori, quod aiunt, determinandae erant. Quibus peractis in his ipſis experimentis ſubſtiti, atque theoriam iſtam nulli hypotheſi eatenus innixam firmam

atque ratam esse, omnibus iterum iterumque expensis etiamnum adfirmatum ire haud ambigo.

Alteram theoriae istius partem, qua eadem luminis reflexi quantitas a priori eruenda atque definienda fuisset, vi eorum quae §. 18. pollicitus eram, duplicem dare, siue duplici eam systemati virorum summorum NEWTONI atque EVLERI adcommodare constitueram. At re maturius pensitata a proposito in praesentiarum recessi, alio forsan tempore ad istud regressurus. In experimentis quibus difficillimam hanc rem absolutam dedi, si acquiesco, veniam hanc ab aequis lectoribus me impetraturum esse spero. Neque dubito, quin cel. EVLERVS, pro eximio, quo pollet ingenii acumine & sagacitate, quantitates experimentis istis erutas, & ex ingeniosissimo suo systemate definitum eat, si quidem rem istam operae pretium esse ducat. Alterius hypotheseos prima fundamenta in §. 698. lectores inuenient, iisque quoque rationes subiunxi, ob quas a proposito destiti, istud saltem in aliud tempus distuli.

Ut ergo hac ratione ea theoriae pars, quae vel minus videbatur matura, vel minus firmis nitebatur fulcris, suppressa deprehendetur, ita contra ea, quae de claritate corporum opacorum praecipue de luna plena eiusque phasibus demonstrata dedi, nilominus a placitis cel. virorum SMITHII & EVLERI differre Lectores reperient, si §. 72. seqq. 101. 112. 1030. 1048. 1050. 1060. 1063. inter se conferre velint.

Instru-

Inſtrumenta, quibus definiuntur colorum miſcelae breuibus indicaui, cum viderem, ea delectationi potius quam theoriae luminis curatius euoluendae inſeruire. Ex iis tamen, quae §. 1196. 1197. dixi, haud difficulter iſta praxi adcomodabit, qui rei periculum facere geſtiet.

His ita praenotatis pauca ſunt, quae inſuper monenda habeo. Primo enim facile obuium erit, valorem literae π, quam in calculis tantum non omnibus adhibui, duplicem eſſe, eamque in toto opere rationem inter peripheriam & diametrum circuli denotare, atque praeterea iluminationem abſolutam breuitatis ergo fere ubique per π deſignari. Hanc equidem per unitatem efferendam eſſe dixeram §. 111, quippe per eandem unitatem exprimenda erat radiorum quantitas e ſpatio ſuperficiei luminoſae $=1$ in ſpatium plani illuminati $=1$ incidentium. At vero cum in toto fere opere ſpatia iſta ſumantur circularia, quorum ſemidiameter comodius per unitatem numerosque ipſi comenſurabiles effertur, quam vero eius area, hinc vel ſua ſponte patet, cur illuminatio abſoluta fere ubique prodierit $=\pi$ (§. 123.) atque quantitas radiorum in caſu illuminationis abſolutae $=\pi\pi$ (§. 124. 169. 175. 214. ſeqq. &c.) cum poſito radio $=1$, area circuli ſit $=\pi$. Haec praenotanda erant, ne morarentur Lectores, quoque id fiat minus, meminiſſe iuuabit, unitates iſtas maxime eſſe arbitrarias (§. 43. 779.) unde vel per ſe euidens eſt, valorem iſtum ipſius π retineri iure meritoque potuiſſe. Quanam vero ratione ipſi ſubſtituantur verae quantitates exemplis §. 733. 768. 964. 1227. 1233. &c. palam fit.

Porro quod passim notaui, experimenta photometrica adhucdum cuncta pendent a iudicio oculi. Unde si quis ea quae descripsi repetat, alioque modo videat, id mihi haud imputatum iri confido. Oculorum meorum aciem atque sensibilitatem, quantum in me fuit experimentis exploratam dedi (§. 255. seqq. 265. seqq.) atque insuper cautelas adiunxi, quibus usus sum. Generaliores in C. III. P. I. coaceruaui, specialiores hinc inde experimentis ipsis interserendas satius esse duxi, ut adeo & in his eo candore, qui Veritatis sectatorem maxime decet, cuncta descripta reperiant Lectores. Sunt experimentorum plurima, quae primo intuitu dicto citius absolui posse videbuntur. At hoc ipsum dubium unius alteriusue horae spacium ipsis peragendis vix sufficere, facto rei periculo, docuit.

Mea quidem sententia ad veritatem hac ratione accedemus proxime tutoque gressu, si eadem experimenta a pluribus seorsim instituantur, atque porro ex cunctis medium sumatur eo modo, quem in C. III. P. I. descriptum dedi. Ita enim primo veritas a posteriori innotescet, atque hac inuenta de theoria curatius excolenda cogitare licebit. Aderunt data, quibus ad examen reuocabitur strictissimum. Porro sunt experimenta plurima, quibus instituendis defuit vel otium vel oportunitas. Eorum tamen rationem euolutam dedi una cum cautelis, quas necessarias esse praeuidere poteram. Eiusmodi reperient Lectores § 677. 1049. 1184. Ita quoque pluribus corporibus & pigmentis applicari facile poterunt ea, quae in C. II. P. III. exposui.

Sunt

Sunt quoque capita quaedam, quae potius hypothesibus quam ipsis veritatis fundamentis superstruxi, veluti ea quibus de claritate athmosphaerae, de diluculo, de distantia & lumine Fixarum sermo est. Haec corollarii vel appendicis loco ceteris adnexa esse iudicent Lectores velim. Utique inter hypotheses quas *mathematicas* vocabo, & eas, quae *physicae* sunt, maxima adest differentia. Physicae ita plerumque assumuntur, ut qua in re a vero aberrent haud constet, unde fit ut suo quaeque ordine iterum reiiciantur, prout earum a vero aberratio successu tantum temporis detegitur. In mathematicis fere semper non modo constat, quanam in parte a vero recedant, verum & plurimis casibus in antecessum definire licet aberrationis momentum. Ita v. gr. si quod in tractatu *Les routes de la lumiere* feci, parti curuae admodum paruae substituatur circulus osculator, si seriei maxime conuergentis abiiciantur termini primos sequentes, aberrationes quam proxime definire licet. Simili modo si fingatur formula experimentis proxime satisfaciens, erit ista hypothesis, qua frui tuto licet, donec ipsa veritas sese nobis spectandam sistat. Huius vero generis esse hypotheses, quibus passim usus sum, intuenti haud aegre fiet manifestum. Ita enim eam, quam dedi §. 425. seqq. non modo cum experimentis collatam, verum & ipsa eius criteria curatius euoluta Lectores videbunt §. 439. seqq. idemque & in Cap. II. P. IV. peractum esse reperient.

Claritatem athmosphaerae calculo definitam nondum vidi, unde quae de ea differui, mihi

mihi ſaltem noua fuerunt, atque a primis initiis deducenda. Ipſa quoque rei difficultas, maximum geometris incitamentum, cum multifaria in aere adſit luminis reflexio, refractio, inflexio, diſperſio, calculum ad amuſſim cum veritate congruentem, hactenus quidem plane reſpuere videtur. Diſtincta tamen certiora a minus certis, Lectores animaduertent, atque ſimul videbunt, pedetentim me in re iſta perquirenda eſſe progreſſum, atque hypotheſium admiſſarum vim earumque pretium ex aequo definitum eſſe ex §. 901. 910. ſeqq. 916. 938. 949. 953. 956. facile diiudicabunt. Ita v. gr. ſeries, quam exhibeo §. 879. ab omni hypotheſi libera eſt, ea vero quam dedi §. 952. ab una tantum hypotheſi pendet, qua inflexio luminis eius diſperſionem in aere parum mutare ponitur.

Denique ſi quis a nouitate materiae, & iucunditate poſitionum & experimentorum, quae in hoc Photometriae Tentamine expoſui, & a fructu, quem inde forſan capiet luminis theoria animum abſtrahat, atque cui bono totum hoc opus ſit, ex me quaerat, hoc unum adiungam, *Pyrometriam*, quam curatius euoluendam ſuſcepi, ſcopum huius libri primarium fuiſſe. Quanam vero ratione menſura luminis ad menſuram caloris & ignis quicquam faciat, & quis inter utramque ſit nexus, hoc in ipſo Pyrometriae opere, Deo adiuuante, ob oculos ponetur.

His interdum fruere, Lector beneuole,
& inceptis fauere perge.



INDEX





INDEX CAPITVM.

CAP.

PARS VII.



PHO-



PHOTOMETRIA
SIVE
DE MENSVRA ET GRADIBVS
LVMINIS, COLORVM ET VMBRAE

PARS I.
QVA EXPONVNTVR
MODIFICATIONES ET GRADVS
LVMINIS DIRECTI
EIVSQVE CLARITATIS ET VIS ILLVMINANTIS.

CAPVT I.
Inſtituti ratio, primaeque Photometriae notiones & principia.

§. 1.

Commune id eſſe videtur ſcientiae humanae fatum, ut ea ſint ab intellectu remotiora, quae vel maxime obverſantur ſenſibus. Huius certe nobis effati praeclare ſiſtit exemplum luminis theoria.

ria. Plures enim eaeque grauissimae in pervestiganda ipsius vi atque natura occurrunt difficultates vix ac ne vix superandae, ut mirum sit, in eadem re, quae fons est ipse claritatis, tanta adhuc cognitionem nostram circumfusam esse caligine, tantasque in ipsa luce remanere tenebras. Arduam sane ni prorsus imperuiam in rebus physicis esse viam, quae ab effectibus ad eas procedit caussas, quas oculis subiicere non datur, ita est euictum, ut ne passum quidem faciamus, quin huius rei offendamus exempla.

§. 2. Difficultates vero istae, ut primo sese offerunt meditanti, ita ab eis ordiendum esse duxi hanc, quam prae me habeo, mensurae luminis theoriam. Omnia enim, saltem plurima deesse videntur adminicula, quibus in aliis rebus veritatis perscrutationem promouere, quantitatumque symptomata dimetiri licet. Deest physica luminis, siquidem demonstratam rationibusque innixam desideraueris, theoria. Desunt, quibus lumen metiremur, instrumenta. Desunt denique prima, a quibus cetera deducerentur, principia. Et quod non minus his omnibus geometrae facessit operam, dum singula inuenta connectere, suoque ordine debite digerere cupit, ne in circulum incurrat logicum, vix sibi cauere potest.

§. 3. At vero ne nimis quam par est exaggerare videar, quae iam in medium protuli obstacula, aequa lance sigillatim ista expendere conuenit. Theoriam luminis, quatenus hactenus exculta est, huic scopo non sufficere, facile euincitur, cum quodnam Systematum, quae

quae de ea re hactenus in lucem prodiere, amplectendum ſit, qui nonniſi demonſtrata admittere velit, dubius haereat. Etſi enim, ut cetera praetergrediamur, ea quae ſibi finxerunt viri ingenii acumine praeſtantiſſimi, NEWTONVS atque EVLERVS, pro explicandis phaenomenis quam plurimis in uſum vocari poſſint, *Eulerianum* certe cum ipſa rei natura vel maxime videatur congruere, id tamen in utroque adhuc dolendum eſt, quod inſtar principiorum pro eruendis novis phaenomenis nondum tuto adhiberi poſſunt, atque etiamſi poſſent, nilominus in menſura luminis occurrere videmus caſus haud paucos, quibus qua ratione alterutrum adplicari poſſit, nequaquam conſtat. Horum certe quosdam cum iam perſpiceret NEWTONUS, quaſi a difficultatibus deterritus, ita eos in dubio reliquit, ut ne experimentis quidem quidquam tentaret, cum theoriam prorſus videret ipſi fore defuturam.

§. 4. Equidem hiſce hypotheſium uſum earumque pretium minuere nequaquam volo. Quodſi enim ea, quae ad Syſtema quoddam pertinere proſpicimus, ordine ſuo naturali proponere nondum liceat, ficto certe uti, ut quantum in nobis ſitum eſt confuſionem vitemus atque obſcuritatem, proficuum duco & neceſſarium. Accedit quandoque, quod eandem hypotheſin, quam primo fictam ſaltem credebamus, cum eam ſolertius perluſtramus, paullatimque ab erroribus liberamus, veram eſſe, aut veram tandem evaſiſſe deprehendamus. Hac ratione Syſtema mundi indies magis magisque innoteſcere abunde conſtat. Neque

 dubi-

dubitandum theoriam luminis Eulerianam haud dissimili modo expolitum iri, etsi hactenus explicandis cunctis phaenomenis nondum sufficere videatur. Id enim inter praecipua atque certissima ponendum hypotheseos ad verum accedentis criteria, cum quis ex eo, quod condidit systemate, nouorum phaenomenorum praeuidere possit euentus, atque inde deducere positiones, quibus experimenta eum in finem instituenda adstipulantur. At nondum vidi hypotheses, quae hactenus de natura luminis excogitatae sunt, hoc sustinuisse examen, cum satagendum sit, quo possint singulis accommodari phaenomenis iam notis.

§. 5. Etsi ergo defectus isti, quibus laborat physica luminis theoria maxime sint notabiles, ut impediri vix possit, quin magna ex parte & in Photometriam irrepant; attamen si fatendum quod res est, in hac parte longe erunt minores. Etenim Photometria non docet luminis naturam, quae a sensibus est remotissima, verum metitur eius vim atque claritatem, ceterosque ipsius effectus, qui sensibus vel maxime obuii sunt. Dudum vero iam notum est, grauitatis certe exemplo apertissime euincitur, mathematicam rerum naturalium harumque effectuum cognitionem a physica parum pendere, illamque citato passu promoueri mirumque in modum posse amplificari, etsi haec semper angustis contineatur cancellis.

§. 6. Neque tamen sperandum, Photometriam ideo cum theoria ponderis & motus grauium pari esse ambulaturam passu. Desunt enim, quod iam supra monuimus, instrumen-

ta,

ta, quibus menſuranda foret luminis in dato quouis caſu, intenſitas, quibusque vice lancis & moduli uti liceret. Quamuis enim infra varia deſcripta inuenias inſtrumenta photometrica, attamen eatenus ſaltem uſui eſſe poſſunt, ut eorum ope luminis colorumque claritas in data ratione augeatur vel minuatur, usque dum claritati datae euadat ad ſenſum aequalis, oculo videlicet iudice. Eadem nempe etiamnum Photometria premitur difficultate, quae ante inuenta thermometra obſtitit exactiori caloris menſurae. Optandum certe eſſet, ut excogitaretur *Photometrum* thermometro analogum, quod lumini expoſitum eius intenſitatem atque claritatem indicaret. Enimuero ipſe oculus nobis eius ſiſtit exemplar, quippe pupillae apertura luminis ſequitur magnitudinem ac claritatem, & utrique ſeſe accommodat. At magnopere dubitandum artem in hoc negotio naturam poſſe imitari. Vix enim parabitur materia ſenſibilitate fibrillarum oculi gaudens, motuique luminis cedens, etiamſi huius claritas ſit perexigua. Non me latet, hunc in finem ſumta fuiſſe a pluribus experimenta, quibus demonſtrare conati ſunt, motum luminis eſſe ſenſibilem, cum arena vel lamina chalybea foco lentis cauſticae vel ſpeculi uſtorii expoſita, a vi radiorum ſolarium agitaretur. Merito enim dubitare licet, lumini an calori effectus iſte adſcribi debeat, atque etiamſi eum a ſolo lumine proficiſci concedamus, cum tanta requiratur radiorum denſitas, parua certe remanet ſpes, idem obtineri poſſe, ubi menſurandum venit lumen longe

debilius. Quodſi vero lumen ſumatur ſolare, atque ponere liceat, huius calorem in eadem ratione minui vel intendi, qua minui & intendi poteſt eius denſitas, thermometrum utique photometri vices ſuſtinere poterit. At nimis arctis eius vſus circumſcriptus erit limitibus. Quis enim ope thermometri luminis lunaris deteget claritatem?

§. 7. Quoniam itaque in definiendis luminis gradibus ſolus oculus eſt iudex, ſupereſt ut exponamus, quae & hic obſtant, quo minus voti ex aſſe compotes fieri licet. Eadem nempe, de qua iam ſermo nobis fuit, aperturae pupillae variatio iudicium noſtrum de claritate luminis reddit incertum. Eo enim clarius videbitur lumen, quo maior eſt iſta apertura, quoque adeo uberior datur lumini in oculum ingreſſus. Hoc vero fit, ut lumen clarius nobis minus videatur clarum ac foret eadem manente pupillae apertura. Accedit conſuetudo, qua oculus paullatim & nocturnis tenebris ſeſe adcommodat. Quale quid videmus in hominibus obſcuris carceribus incluſis, qui nilominus ſingula obiecta diſcernere poſſunt, pedentim enim ipſis nervorum ſenſibilitas, a maiori lumine veluti hebetata, redire ſolet. Quod idem diluculum matutinum veſpertino crepuſculo reddere valet longe clarius, cum interdiu oculorum acies haud parum obtundatur.

§. 8. Utraque haec aberratio, quae oculi de claritate iudicium reddit incertius, ſimul aliud poſt ſe trahit incommodum. Ut enim oculi iudicium exactius definiri queat, oporteret

teret aberrationis iſtius rationem habere, eamque in calculum inducere, ut inde cetera photometriae principia ſtabilire liceret. At ſi curatius in rem iſtam inquiramus, principiis hiſce iam opus eſſe patebit, pro determinando errore, qui in iudicio oculi occurrit. Quomodo ergo hic vitari poſſit circulus logicus, ſi univerſam Photometriam omni rigore demonſtratam deſideraveris, ego quidem non video. Quodſi vero ab iſto rigore paullo recedamus, medium dabitur, poſitiones Photometriae ita connectendi, ut certitudine ſua non careant.

§. 9. Antequam vero eo deueniamus, iuvabit prius oculi iudicium curatius examinare, idque cum iudicio ceterorum ſenſuum, maxime vero auris & ſenſus caloris comparare. Illud quidem ipſa requirit Photometria, quippe oculi nititur iudicio. Hoc vero examen, quod inſtituemus, non modo illuſtrabit, verum & uniuerſaliorem reddet fructum, quem inde capere licebit.

§. 10. Senſus caloris ad grauiores nos deducit fallacias iudicii, quam oculus & auris, ſi caloris, luminis & ſoni ſpectes intenſitatem. Calor enim & frigus, quatenus utrumque ſufferre valemus, longe arctioribus circumſcribuntur limitibus, quam lumen & ſonus. Lumen enim a cimmeriis tenebris ad auguſtiſſimum ſolis ſplendorem usque per infinitos fere gradus, quos ſingulos adhuc diſcernere valet oculus, aſcendit. Similia quoque ſonorum interualla ab aure diſcerni, neminem latet. Longe porro facilius eo nos deducit ſenſus caloris, ut eandem aeris temperiem frigidam eſſe

esse dicamus, quae, etsi non mutata, alio tempore calida nobis videtur. Opus certe fuit thermometro, antequam persuadere nobis passi simus, cellas profundas hieme & aestate eadem gaudere temperie, hancque ibi numquam mutari.

§. 11. Inuento thermometro iudicium nostrum de calore & frigore longe euasit certius, atque jam in nostra situm est potestate, gradum caloris producere dato gradui aequalem, independenter a iudicio sensuum. Huic commodo simile at non aequale habet auris, dum ope instrumentorum musicorum tibiarum potissime & organi datum sonum quandocunque volueris iterum producere possumus. Quodsi vero ipsi aequalem producere desideraueris, auris certe iudex esse debet, paucis saltem casibus theoria adiuuante. Hactenus autem longe minus iuuatur oculus. Etsi enim varii generis lumina veluti e tenebris suscitare possimus, prout varia accendamus combustibilia, attamen eiusmodi claritas neque constans est neque conseruari potest ac iterum produci ut tubarum sonus. *Oculus ergo caret instrumentis & thermometro & organo analogis, sibi soli relictus iudicium ferre debet.* An ope luminis electrici claritas constantis gradus produci possit, ut oculus iuuaretur veluti auris, valde dubito.

§. 12. In calore nonnisi gradus distinguit thermometrum, prout vel intensiores sunt vel remissiores; Idem obtinet ratione sensus, at maxima est inter utriusque iudicium differentia. Dum enim thermometrum in aqua & aere eundem ostendit caloris vel frigoris gradum,

dum, manus aquam aere mox frigidiorem mox calidiorem esse putat. Lumen vero & sonus non gradu saltem sed & specie differre possunt. Illud quidem dum in multifarios dispescitur colores, quorum singuli clariores esse possunt vel obscuriores, dum maiori vel minori lumine collustrantur. Eadem diversitas & inter sonos adest. Ut vero facilius dissonantiam percipit auris, quam soni eiusdem intensitatem huiusque gradus, sic quoque diversitas, quae inter colores varii generis adest, facilius ab oculo dignoscitur, quam eiusdem coloris varii gradus. Coloris enim species ab apertura pupillae tantopere non pendet quam gradus claritatis. Sermo vero nobis hic est de differentiis admodum exiguis.

§. 13. Corpus nostrum temperiei cuidam aeris assuefactum, dum ista mutatur, paullatim sese novae huic adcommodat temperiei, quod vel maxime obseruamus autumno, cum nouum irruit frigus. Huic ut assuefiamus aliquot dierum opus est interuallo. Contra ea oculus paucis momentis cuivis claritatis gradui sese adaptat, si aperturam pupillae spectes. Secus enim est ratione motus tremuli fibrillarum & neruorum opticorum, quippe solem intuentes diu adhuc, & auersis a sole oculis, eius videmus imaginem alternantibus coloribus tinctam. Hic vero luminis in neruis opticis effectus ut plurimum tunc saltem sensibilis est, ubi lumen, quod adspeximus, vehementer est clarum. Simile quid & ratione auditus obseruamus.

§. 14. Quatenus inter colores prismatis atque tonorum unius octauae interualla quaedam obtinet cognatio harmonica, oculus certe in hac re palmam praeripit auri. Quilibet enim color per se & absque ulla cum ceteris coloribus comparatione cognoscitur. Contra ea difficilior est sonorum distinctio, nisi instrumentis adiuvemur, vel iis iam dudum simus adsuefacti. Potius enim ex auditu cantus cognoscemus cantorem, cuius vocem iam aliquoties audiuimus, quam vero notam quam cantat.

§. 15. Id quoque porro commune est omnibus sensationibus, ut fortior debiliorem supprimat. Sic in aprico vel nulla esse videtur candelae claritas. Contra ea haec lumen istud, quod noctu diffundit lignum putridum, ita reddit inuisibile, quasi nullum adesset. Facile ergo & hoc respectu erroneum euadit oculi iudicium. Interdiu chartam soli expositam aeque fere claram videmus ac lumen candelae, cum noctu longe sit obscurior, ubi nonnisi a candela collustratur. In utroque tamen casu inter eadem obiecta instituitur comparatio. Ambo quoque ista interdiu a sole collustrantur, qui noctu iterum ab utroque abest.

§. 16. Expositis praecipuis oculi fallaciis, disquiramus oportet, qua ratione ipsis mederi possit. Diutius enim quibusdam videbor defectibus istis immoratus, quasi eiusdem scientiae quam hic tradere constitui, fundamenta prius conuellere totamque eam incertam reddere voluissem. At vero non improbatum iri ab

ab aequis rerum arbitris hujuſcemodi inſtitutum confido, quippe nequaquam mihi propoſitum erat, ea pro certis atque inuictis venditare, quae demonſtratione adhuc indigere ipſemet praeuidere poteram. Expedit ſane in re phyſica prima ponderare principia, primasque probe euoluere notiones, antequam ad ea feſtinemus, quae inde fluere prono ſaepe alueo videmus. Hoc quippe modo ea quae certa ſunt cognoſces certa eſſe, dubia vero ulteriori ſubiicere dabitur examini. Plura ſunt in Phyſicis, quae geometrarum more etſi demonſtrari nequeant, nilominus certitudine aeque gaudent quam quae certiſſima. Utriusque vero huius certitudinis internoſcere diſcrimen & utile erit & neceſſarium.

§. 17. Photometriam ceu alteram ſpectamus Optices partem. Primam eam dicimus, qua luminis tractatur via atque motus, huiusque variae quae dantur modificationes, phaenomena & uſus. Prioris huius partis tractationi, cum iam plurima de ea proſtent eaque praeſtantiſſima opera, non modo hic ſuperſedere licebit, verum & cuncta ea praeſupponere, quae de ſtructura oculi, de via luminis, variisque inſtrumentis opticis & in vulgus notis ibidem dicuntur atque demonſtrantur. Contra ea in altera hac parte, quam Photometriam inſcripſimus, veluti ab ouo erit ordiendum, ubi de claritate luminis, de vi ipſius illuminante, de variis colorum & umbrae modificationibus ſermo eſt. De his enim etſi iam paſſim quaedam in opticis ſcriptis reperias, nilominus conuenit iſta a primis veluti originibus

nibus repetere, ut qua ratione cuncta cohaereant perſpici poſſit.

§. 18. Iſtae vero luminis modificationes ut vel maxime oculo ſunt obuiae, atque proinde experiri eas utique datur, ita Photometriam quoque, ut eo euadat certior, experimentis ſuperſtruendam duxi. Theoriam enim ſingulis difficultatibus enodandis imparem eſſe, iam ſupra monui. Neque tamen eam prorſus reiiciam, verum hinc inde demonſtrationes tentabo, quibus ea quae experimenta docent, ſi non demonſtrari ſaltem captui accommodari calculoque quodammodo ſubiici poterunt. (§. 4.) Haſce porro demonſtrationes utplurimum adcommodabo utrique hypotheſi de natura luminis *Newtonianae* nempe & *Eulerianae*, quippe ceteris fere reiectis, harum alterutri Phyſici hodienum tantum non omnes adhaerent. Prior certe captui, poſterior forſan naturae rei magis eſt adcommodata. Potiſſimum differunt ratione modi, quo lumen e corporibus lucidis emanat atque per totum Univerſum diffunditur. NEWTONVS radios ponit reipſa e corpore lucente emanantes, & veluti eiectos, ita ut maſſa corporis hac ratione continuo minuatur. EVLERVS contra ſyſtema, quod olim excogitauit CARTESIVS poliuit HVIGENIVS ita ſiſtit immutatum, ut pluribus conveniat phaenomenis, potiſſimum vero luminis motui ſucceſſiuo eiusque in varios colores mutationi. Quem in finem lumen ſono, materiam luminis aeri, corpus lucens corpori ſonoro, colores denique variis, quibus in muſicis utimur tonis tonorumque intervallis plane reſpon-

respondere & analogos esse statuit. Luminis & soni motum undulatorium ponit, quo illud per aetherem hic vero per aerem propagatur, illud a speculis, hic a muris similibusque obstaculis reflectitur. Vid. ejus *Coniectura physica circa propagationem soni ac luminis.*

§. 19. Tantas inter summos viros dirimere lites nondum datur. Occurrunt sane in Photometria experimenta haud pauca, quibus utrumque horum systematum adaptari potest facillime. Occurrunt vero & alia eaque gravissima, quibus neutrum facile adcommodabitur, quaeque instar lapidis lydii erunt, si utrumque ad examen reuocetur.

§. 20. Photometriae iam ut prima ponamus fundamenta, ab experientiis ordiemur quotidianis omnibusque obuiis, quibus adstruitur dari luminis varios gradus, variasque lumen pati mutationes, quibus eius alteratur claritas & species. Primae hinc deducuntur notiones, quas curatius indagare atque ab invicem discernere necesse est.

§. 21. Ita neminem spero fore qui neget, duas candelas plus illuminare quam sola; lumine admoto obiecti augeri claritatem; lumen oblique incidens debiliorem producere illuminationem; dari lucem plus minusve claram eandem tamen magnitudinem habentem; luminis eiusdem claritatem eandem videri vel parum mutari, siue maior siue minor sit eius ab oculo intuentis distantia &c.

§. 22. Singulas istas positiones experientia ita firmat, ut de earum veritate nullum remaneat dubium. At vero probe notandum

ea

ea omnia tantum ita nobis *videri*, ut adeo nondum inde concludere liceat, reipsa quoque ista se sic habere. Saltum certe hunc si admittas circulum quidem euitabis logicum, de quo supra monuimus (§. 8.) At uterque cavendus est, si quidem rite desiderentur demonstrata Photometriae principia. Videndum ergo, quatenus fallaciae oculi eius in his experientiis iudicium dubium reddere valeant, quaque ratione dubio isti sit occurrendum.

§. 23. Quodsi vero unquam in re photometrica quicquam valeat axioma, hoc certe erit, cui cetera superstruemus: *Eandem nempe fore visionem, quoties idem oculus eodem modo adficiatur.* Hoc vero admisso, cum de eius veritate dubitari vix possit, varias inde fluere videbimus positiones, quibus utemur, cum experientiae ante prolatae examinandae erunt.

§. 24. Ut enim idem dici possit oculus, idem simul requiri videtur tempus idemque locus (§. 7.) eadem denique sit oportet luminis in oculum incidentis claritas & magitudo, quippe ab utraque pendet pupillae apertura. Quae si secus fuerint, iudicium oculi, quod fert de aequalitate luminis vel claritatis, non adeo erit certum, quin maior desiderari merito possit certitudinis gradus.

§. 25. Similiter ut eodem modo adficiatur oculus, eadem necessario requiritur obiectorum, quae intuetur, magnitudo, distantia, claritas, eademque eorum positio. His utendo cautelis tantam iudicio oculi acquires certitudinem, quanta vel maxima esse potest. Quodsi enim hoc modo duo intuearis vel plura objecta,

obiecta, eandemque ſingulis eſſe claritatem deprehendes, de veritate rei vel tutiſſime feres iudicium. Certitudinem ſaltem maiorem in hiſce dari poſſe ſummopere dubitandum.

§. 26. Quoniam itaque verum erit oculi iudicium, cum de aequalitate claritatis duorum vel plurium obiectorum iuxta ſe poſitorum ſententiam fert, tutiſſime ulterius progredi licebit, ſi ceteros caſus, qui magis ſunt compoſiti, ad primum hunc eundemque ſimpliciſſimum reducamus. Quod obtinebitur, ſimul ac dabuntur media, claritatem quamlibet ita augendi vel minuendi, ut datae claritati euadat aequalis. Prius vero inquirendum erit, quatenus quod de inaequalitate claritatis obiectorum iudicium fert oculus, admitti ceu verum poſſit.

§. 27. Intueatur itaque oculus duo obiecta luminoſa iuxta ſe poſita, eaque deprehendat inaequali lumine gaudere. Utique eodem utendo axiomate (§. 23.) tuto concludemus, aut non eſſe eundem oculum, aut ſi idem eſt, aliter eum a quolibet obiecto adfici. Poſterius caueri poterit ratione ſitus, magnitudinis & diſtantiae obiectorum, ut ſola remaneat claritatis differentia. Quae ſi adeſt aperturam pupillae variam reddere quandoque poteſt. At ſi obiecta ita ſibi ſint vicina, ut oculus utrumque uno obtutu intueatur, patet pupillae contractionem utriusque obiecti lumini deberi. Cum itaque pro utroque aeque ſit aperta, radii in oculum incidentes ratione quantitatis non mutantur, adeoque ratum utique erit eius de diuerſitate claritatis iudicium.

§. 28.

§. 28. Insuper, quod infra fusius explicabitur, paucis tantum hic adnotabimus, variationem pupillae his casibus veritati iudicii, quod fert oculus nil officere. Id enim experientia constat, pupillae aperturam minorem esse, cum lumen fortius intuemur. Denegat ergo radiis luminis transitum, ut adeo debito minus clarum videatur. Nequaquam tamen ita eum denegat, ut duplo minor euadat apertura, cum lumen duplo est densius. Quod enim si locum haberet, singula certe obiecta aeque *viderentur* clara. Contra ea potius videmus obiecta, quae manifesto clariora sunt, oculi quoque iudicio clariora esse. Cuius rei in ferro ad excandescentiam usque paullatim incalescente exemplum habemus euidentissimum.

§. 29. Etsi ergo hinc pateat, oculum, dum duo pluraque obiecta iuxta se posita simul intuetur, de eorum claritate, an aequalis sit vel diuersa, rite iudicare, *non tamen inter gradus claritatis aliam dignoscere valet rationem praeter rationem aequalitatis.* Quod si vero diuersi fuerint claritatis gradus, quoties alter altero sit maior, hoc est quod oculi iudicium superat. Unde cum nobis adhucdum desint instrumenta, aliis utendum erit mediis. His nempe, quod iam monuimus (§. 6. 26.) obiecti alterutrius claritas ita augenda vel minuenda est, ut non modo claritati alterius euadat aequalis, verum & innotescat, quoties claritas ista aucta vel imminuta sit. Æqualitatem obtinere oculus iudicare debet, incrementi autem vel decrementi quod claritas ista cepit, mensura e Photometriae principiis eruenda.

§. 30.

§ 30. Cum diximus, oculum de ratione aequalitatis inter duas claritates iudicare posse, hoc certe non intelligendum erit, quasi geometrico rigore & absolute aequales essent. Ad hanc tamen aequalitatem proxime accedere claritates, quas oculus aequales iudicat, utique assumere licebit. Semper enim minuta adest differentia, quae aciei oculi sese subducit. Experimentis vero, quae infra occurrent, patebit differentiam istam valde esse exiguam meritoque pluribus casibus contemnendam.

§. 31. Duplici vero modo utendum erit isto oculi iudicio. Quod si enim legem quandam, quam ex principiis vel assumtis hypothesibus eruimus, quaeque varios luminis gradus pro datis circumstantiis exhibet, examini experientiae subiicere velimus, hoc certe casu sufficit oculi iudicium etiamsi proxime saltem verum. Etenim hoc tantum nobis propositum est, ut disquiramus, an lex ista cum experientia coincidat nec ne? Quo casu certe sufficit ad sensum eam coincidere.

§. 32. Contra ea exactius requiritur oculi iudicium, maiorque ακριβεια, ubi luminis cuiusdam claritatem definire eamque cum claritate data, quae instar moduli assumitur comparare volumus. Quo enim curatior erit haec comparatio, eo propius ad veritatem, quam quaerebamus, accedimus.

§. 31. His ita praestructis ad specialiora deueniamus. Statim enim primae sese offerunt Photometriae notiones distinctius euolvendae, ut quae in claritate luminis eiusque

vi illuminante diuersa sunt, verbis quoque ab inuicem distinguantur, & suis quaeque nominibus designentur.

§. 34. Quod si ad usum loquendi attendamus, *luminis* ideam utique valde vagam esse deprehendimus. Dantur enim corpora, quae per se luminosa sunt, proprioque lumine gaudent. Sunt & alia longe plurima mutuato saltem lumine visibilia. Quae prioris sunt generis iis utique *luminis* nomen competit, qualia sunt sol, candela, flamma ignis materiaeque electricæ. Huc quoque referas stellas fixas, lignum putridum, vermes & muscae noctu lumen etsi tenue visibile tamen diffundentes. Quae posterioris generis sunt corpora, horum quaedam usus loquendi lumina vocauit, potissimum ea, quae dum maius lumen plane abest, eius vicem sustinent, & obiecta visibilia reddunt. Inter haec eminet luna ceterique planetae, atque interdiu ipsum coelum, quatenus eius claritas in aedes irruit, camerasque collustrat, ut visibilia euadant, quae in aedibus sunt. Neque opus est corpora ista continuo nobis sint vice luminis. Sic enim & interdiu flammam lumen esse dicimus. Sufficit enim quandoque corpora ista lucis sustinere vices. Cumque plurima istiusmodi corpora, quibus luminis nomen damus, albida sint, hinc est, ut flammam sulphuris caeruleam lumen caeruleum esse dicamus, ut adeo & hoc respectu lumen a coloribus parum differat; hoc saltem intercedit discrimen, quod lumen coloratum minus sit frequens.

§. 35. Cum itaque id tantum lumen esse dicamus, quod obiecta vel semper vel quandoque reddit visibilia, patet hanc denominationem a claritate non pendere. Alias enim charta alba in aprico posita lumen esset dicenda, cum aeque clara sit ac candelae flamma, cui certe luminis nomen nemo non tribuit. Cetera obiecta omnia, quae oculo obuia sunt, quatenus ea videmus, *illuminata* esse vel mutuato lumine gaudere dicimus. Quodsi vero & haec quandoque obiectorum claritatem augere videmus, veluti cum murus albus lumen in cameram proiicit, tunc *lumen inde reflecti* iudicamus.

§. 36. Hac loquendi consuetudine proxime in Photometria uti licebit paucis mutatis. Distinguenda utique est claritas luminis, quod obiectum collustrat, a claritate obiecti ab eo illuminati. Eatenus nempe lumini tribuemus *vim illuminantem* siue *splendorem*. Claritatem vero quam in obiecta diffundit *illuminationem* vocabimus.

§. 37. Porro distinguenda venit luminis claritas, quatenus videtur oculis, a claritate eius, quatenus obiecta collustrat. Illam dicemus *claritatem visam*, haec vero si ad corpus luminosum referatur, erit *vis illuminans*, sin ad obiectum *illuminatio* dicetur, quemadmodum iam innuimus. Maxima vero inter claritatem visam & illuminationem est differentia, ut mirum sit, Cel. WOLFIVM utramque perperam confudisse, cum in Optica ait, obiecta remotiora ideo minus clara videri, quod lumen decrescit reciproce ut quadratum distantiae.

Loquitur vero de *claritate visa*, de qua perperam affirmatur haec positio, cum nonnisi de *illuminatione* locum habeat. Similiter passim claritati visae planetarum tribui inuenies quae illuminationem tantum spectant. Quanta vero inter utramque sit diuersitas, suo loco ostendetur.

§. 38. Similiter in quolibet corpore luminoso distinguenda venit eius magnitudo cum vera tum adparens, eadem enim & lumini duplici hoc sensu conuenit, cuius quippe volumen, manente claritate, augeri minuive potest. Hinc nascitur idea de luminis *magnitudine vera & adparente.* Prior absoluta est, posterior a priori simulque a corporis pendet distantia & situ.

§. 39. Contra ea, manente corporis luminosi magnitudine & distantia, eius claritas per infinitos augeri minuiue potest gradus. Huc referas exemplum de ferro ad excandescentiam usque calefacto supra iam allatum (§. 28.) similique modo chartam a candelis illuminatam, quarum numerus augetur vel minuitur, vel eandem chartam candelae propius admotam, vel longius ab ea remotam. Diuersam hanc eiusdem corporis claritatem, si ad ipsum corpus luminosum referatur, vocabimus *intensitatem luminis* vel *densitatem radiorum.* Hac ratione solem lumen esse dicemus intensissimum, cum maxima in eo sit radiorum densitas.

§. 40. Claritatem, qua gaudet corpus, quatenus illuminatur, illuminationem vocauimus, nulla amplius superaddita distinctione. *Quod si enim occurrant casus, ut haud raro solent, quibus*

corpus

corpus mutuato saltem lumine gaudens luminis vices sustinet, aliaque iterum corpora collustrat (§. 34.) *his casibus omnia de eo valebunt, quae de corpore luminoso diximus.*

§. 41. Alia insuper datur aequiuoca luminis denominatio, adhuc curatius definienda. Lumen enim quandoque & ipsum corpus luminosum vocamus, quandoque vero claritatem quam eiusmodi corpus circumcirca diffundit. Posteriori hoc casu lumen *emanare* & per immensa spatia *propagari* dicimus. An vero tantum propagetur eius claritas siue effectus, quod statuit EVLERVS, vel an cum isto effectu simul e corpore luminoso emanent particulae luminis, quod NEWTONO magis arridet, in dubio hic linquimus (§. 5.). Vtraque absque ullo erroris periculo in Photometria uti licebit phrasi, cum euidentissime demonstratum sit, lumen non modo moueri, verum & successiuum esse eius motum, unde adeo perinde erit, siue lumen cum particulis siue absque iis e corporibus emanare dicamus. Idem sane erit effectus, cum is esse debeat, qui experimentis congruat.

§. 42. Dum vero lumen e corpore luminoso emanat *radius* audit. Radius secundum NEWTONVM est series particularum luminis sibi subsequentium & recta e corpore lucido emanantium, EVLERO vero idem est ac unda aetheris recta propulsa, sonique vndis in aere analoga. Utcunque autem nobis radiorum fingamus naturam atque indolem, si effectum spectes oculo vel maxime visibilem, utique concedendum erit, eum duplici modo consi-

derandum esse, *cum radiorum densitas ab eorundem quantitate necessario sit distinguenda.* Nobis certe sufficiet vulgarem radiorum ideam retinere, quam sequentem in modum ab ineunte aetate acquirimus.

§. 43. Incidat lumen v. g. solare per foramen quoduis in cameram probe clausam & obscuram, videbuntur particulae & puluisculi aeri innatantes a lumine collustrati viam qua lumen progreditur clarissime denotantes. Totum istud spatium aeris recta a foramine ad fundum usque camerae protensum, quatenus lumen istud permeat, radium luminis vocamus. qui cum eo magis extenuetur, quo arctius clauditur foramen, hinc idea nascitur, radium istum ex pluribus aliis esse compositum. Quare eundem successiue diuidendo ideam inde nanciscimur radii simplicis & velut infinite tenuis. At vero hic haeret aqua, cum ulterius progredi nequeamus. Neque id Photometria requirit. Sufficiet enim radium compositum, qualem antea descripsimus, curatius inuestigare. Hunc in finem ponamus eiusmodi radium excipi charta alba, ita ut normaliter in eam incidat, atque patet chartae quoddam spatium a radio isto illuminatum iri. Manente iam chartae a foramine distantia & situ, augeamus foraminis aperturam, atque palam est, spatium istud illuminatum simili ratione augeri. Uberior enim iam lumini datur ingressus, siue ut phrasi utar tritissima, plures in chartam incidunt radii. En igitur radiorum *quantitatem.* Etsi ergo analysis radiorum luminis eousque non sit promota, ut qualis sit radius

dius simplex inde deducere possemus, nil tamen obstat quo minus, ut ita loquar, fasciam radiorum ceu unitatem spectemus quantumuis arbitrariam, hacque unitate radiorum copiosiorum exprimamus quantitatem.

§. 44. At iam, eadem manente chartae positione, atque apertura foraminis, in locum solis substituamus lunam plenam, cum eadem gaudet magnitudine adparente, utique idem, quod in priori casu, illuminabitur chartae spatium, at quanta aderit claritatis differentia! Plures igitur priori casu in idem chartae spatium incidisse radios utique concludendum est, cum iam multo debilior sit chartae claritas. En ergo alterum, radiorum nempe *densitatem* siue *intensitatem*. Densiores itaque dicendi sunt radii, ubi plures in idem spatium incidunt. Manente vero densitate, plures erunt, ubi maius collustrant spatium.

§. 45. Populari hac radiorum idea & differentia in sequentibus frequentissime utemur, eam igitur fusius explicasse non piget. Quaecunque enim in prima Optices parte de via luminis demonstrantur, hac fere nituntur radiorum idea, hoc tantum intercedente discrimine, ut cum ibidem viae luminis habeatur ratio, radii per rectas exprimantur. Contra ea in Photometria luminis linearis exiguus est usus, quippe hic spectatur, quatenus superficiem collustrat.

§. 46. Primariis iam Photometriae notionibus fusius enucleatis ad eas reuertemur experientias, quas supra breuibus indicauimus

 (§. 21.)

(§ 21.) Diximus vero, quod & vulgo notissimum.

1°. Duas pluresue candelas plus illuminare quam unica.

2°. Obiectum lumini propius admotum clarius fieri.

3°. Lumen oblique incidens in superficiem, eam minus illuminare.

Quaeritur iam, quamnam illuminationis istud augmentum vel imminutio in singulis his casibus sequatur legem? Haec enim cum innotuerit, dabitur modus idemque multiplex luminum quorumcunque claritatem inter se comparandi.

§. 47. Equidem facile praeuideri potest, data lege pro unico trium istorum casuum, ceteros experimentis definiri posse. Sic enim v. c. prima assumta, augeri nempe illuminationem in eadem ratione, qua augetur candelarum numerus, dabitur medium producendi claritatem duplam, triplam, quadruplam &c. Hinc vero facillime definietur distantia luminis cuiusdam, qua illuminatio dupla, tripla &c. euadit. Eodemque modo definientur anguli incidentiae, sub quibus obtinet claritatis pars dimidia, tertia &c.

§. 48. Ut vero quicquam in hac re definiatur, alias experientias in subsidium vocabimus, quarum ope leges istas definire licebit. Obiecti cuiusuis singulas partes visibiles esse, quacunque te vergas, nisi ab aliis operiantur abunde constat. Hinc iure meritoque dudum iam intulerunt, particulam quantumuis paruam superficiei corporis luminosi, quaquauersum radios

dios ſuos diſpergere, unde porro *puncti radiantis* nata eſt idea. Radios ergo, qui e ſimili puncto quaquauerſum emanant, veluti e centro *diuergentes* nominarunt, eosque adeo pro ratione maioris a cento diſtantiae, *rariores* fieri, ſiue denſitatem eorum decreſcere ſtatuerunt. Nec ſine ratione. Concipiamus enim duas ſuperficies ſphaericas easque concentricas circa punctum radians deſcriptas. Euidens eſt, eosdem radios utramque iſtam peragrare ſuperficiem. At in ſuperficie ſphaerae maioris per maius ſpatium diffunduntur, unde utique minor eſt ibi radiorum denſitas. Cumque in genere denſitas iſta cenſenda ſit eſſe ut numerus radiorum per ſpatium diuiſus, conſequens eſt, *denſitatem hoc caſu decreſcere ut ſphaerarum ſuperficies, adeoque reciproce ut quadratum diſtantiae a puncto radiante.*

§. 49. Hanc demonſtrationem aut ſimilem in omnibus Optices inſtitutionibus inuenies, ut adeo ipſi diutius immorari ſuperfluum ſit. Cunctis enim reſpondet luminis phaenomenis, atque abunde confirmari poteſt experimentis.

§. 50. Lumen lumini, dum per eundem locum tranſit, non obeſſe, adeo eſt manifeſtum, ut probatione non indigeat. Admiranda ſane eſt radiorum luminis per totum univerſum diſſeminatio, cum ſingula obiectorum puncta radios ſuos quaquauerſum diffundant, eaque ubique locorum oculo reddant viſibilia. Admirandus quoque infinitorum radiorum per foramen quantumuis exiguum ſimultaneus tranſitus, cum eiusmodi foramine, lamina nempe metallca ſiue charta vel tenuiſſima acicula

pertusi, oculo propius admoto, singula simul obiecta uno obtutu per angustissimum istud foramen cernere liceat. Quod idem si camerae obscurae adplicetur, singula obiecta exteriora intra eam, radiis charta alba exceptis, spectanda exhibet.

§. 51. Miranda hac radiorum proprietate, magna ex parte nititur lex altera, *chartae nempe illuminationem eo esse maiorem quo maior est numerus candelarum, a quibus collustratur, si quidem aequali eas gaudere claritate, aequali a charta distantia aequali denique magnitudine ponas.* Cum enim lumen alterum alteri non officiat, patet quotlibet novis superadditis candelis, aequales quoque chartae superaddi claritatis gradus. In genere enim vi simplae additur dupla tripla &c. priore non destructa.

§. 52. Quodsi iam in locum candelarum aliud substituamus lumen, aeque clarum, cuiusque magnitudo adparens sit summae magnitudinis adparentis candelarum aequalis, eandem hoc in charta producet claritatem. Ut adeo quod iam dudum statuerunt Optici, assumere utique liceat, *illuminationem eo maiorem fore, quo maior est superficies corporis illuminantis, eadem nempe manente distantia, eodemque luminis splendore.* Superficiem vero hic, quod probe notandum, sumimus adparentem. Aliter enim rem sese habere, si gibba fuerit, siue si verae eius figurae rationem habeamus, suo loco ostendetur.

§. 53. Simili porro modo tertiam quoque legem definierunt Optices scriptores, quae obliquitatem incidentiae spectat. Etenim minorem

norem esse radiorum numerum, cum oblique in eandem incidunt superficiem, facile euincitur, unde non possunt non rariores esse. Necesse igitur est, chartam minus illuminari. Claritatem vero decrescere in eadem ratione, qua decrescit sinus anguli incidentiae, sic demonstratur. In planum A B incidant radii paralleli intra parallelas C A, D B sub angulo C A F = D B F. Ponamus iam eosdem radios excipi plano A E ad directionem radiorum normali. Patet eundem radiorum numerum a plano A E intercipi, qui antea intercipiebatur a plano A B maiori altero. Densiores itaque sint oportet in A E quam in A B. Quare cum densitas sit ut radiorum numerus per spatium, in quod incidunt, diuisus, idem hic radiorum numerus priori casu diuidendus erit per A B, posteriori autem per A E, adeoque densitas in A B erit ad densitatem in A E reciproce ut istae rectae, siue directe ut A E ad A B. Quod si iam A B spectetur ut radius vel sinus totus, erit A E sinus anguli incidentiae. Quare *illuminatio normalis erit ad illuminationem obliquam ut sinus totus ad sinum anguli incidentiae.* Eo igitur minor erit quo minor est anguli incidentiae sinus. Fig. 1.

§. 54. En ergo demonstrationem trium istarum legum, quibus definitur illuminationis in dato quouis casu alteratio & gradus, quas in omnibus, qui de re optica scripti sunt libris inuenias. At si dicendum quod res est, nulla earum seorsim experimentis firmatur, cum, quod iam supra vidimus, oculi iudicium, quo hic opus est, ultra rationem aequalitatis non admitti

admitti ceu certum possit. (§.7.11.29.) Illuminetur enim charta a candelae lumine. Huic iungatur alia, in quam duae candelae radios suos diffundant. Hanc certe priori videbis longe clariorem. An vero dupla sit claritas, ratiocinio quidem instituto praesumis, oculo vero certo diiudicare nequis. Simili modo chartam a candelae lumine remotiorem obscuriorem esse videbis altera, quae lumini propius est admota. At quanta praecise sit inter utramque claritatem differentia, quaenam ratio, hoc certe dubium oculus non soluit. Eodem modo lumen obliquius incidens obscurius videbis, metiri claritatis decrementum oculo solo adiuuante non poteris. Undenam ergo positionum istarum certitudo, si quod aiunt a posteriori desideretur?

§. 55. Equidem in promtu est methodus, legum istarum quamlibet cum ceteris, experientia duce, comparandi, unde euincetur, altera earum ceu vera admissa, ceteras quoque veras fore, ut adeo communi quasi nectantur vinculo, quo sese vel mutuo probant, vel destruunt. Etsi enim singulae ex eodem luminis conceptu eodemque vel maxime uaturali deductae sint, attamen cum in physicis parologismo nil sit facilius nil quoque frequentius, hi, qui in scientiis demonstrandis summum desiderant rigorem, a circulo logico, quem hic subolere sibi putabunt, cauendum esse clamabunt.

§. 56. At si quid ego in re physica video, huiuscemodi in demonstrationibus physicis rigor aut rarissimus est aut nusquam habet locum.

eum. Ea enim vel maxima erit certitudo, cum legem quandam ita cum ſingulis phaenomenis congruere videmus, ut quouſque extendantur experimenta, nullis tamen eorum contradicat aperte, cum omnibus cohaereat optume. Hanc vero eſſe trium iſtarum legum indolem, per totum hoc Photometriae opus ita comprobatum videbis, ut dubium remanere poſſit nullum.

§. 57. Ne vero & hic deſideretur huius effati demonſtratio, agedum videamus, qua ratione ſumtis experimentis legum iſtarum altera alteram probet.

EXPERIMENTVM I.

§. 58. Tabulae A B C in A inſiſtant duae candelae aeque clarae, in C D erigatur planum album vel charta ita ut radii ex A normaliter incidant in partem plani B G F D. In H I ponatur planum aliud minus latum, ſic ut umbra ab utraque candela in A procedens obtegat partem plani poſteriorem D F E C. Ex altera parte in K ponatur tertia candela aeque clara ac praecedentes, hac conditione, ut ab umbra quam inde proiicit planum H I obtegatur tantum pars anterior plani D F G B. Hac ergo ratione pars anterior B G F D a duabus, poſterior vero ab unica candela illuminabitur. Qua ſeruata conditione candela K ad planum B E admoueatur vel ab eo remoueatur, usque dum utraque pars D G & D E aeque videatur illuminata. His factis ſumatur candelarum a plano B C diſtantia, atque erit A B ad K C ut $\sqrt{2}$ ad 1. ſiue inuertendo, quadratum diſtantiae Fig. 2.

AB

A B deprehendetur esse ad quadratum distantiae K C ut 2 ad 1, siue uniuersalius ut numerus candelarum in A ad earundem numerum in K. Eodem enim modo pluribus sumtis candelis repeti poterit experimentum. Eo vero exactius erit, quo magis singulae candelae & magnitute & claritate fuerint aequales.

EXPERIMENTVM II.

§. 59. Idem quod modo descripsimus experimentum unica tantum relicta candela sed adhibitis speculis planis, sic institui poterit. Posita nempe candela in K, ipsi ita admoueatur planum H I, ut eius umbra totum planum B E obtegat. Quo facto in L duo vel plura specula pone candelam ita ponantur, ut singula lumen reflectant in partem plani B G F D. Specula vero ista a candela aeque sint remota, sibi vero inuicem proxima. Sumto iam alio speculo, ponatur istud ita, ut lumen candelae, cui propius sit, in partem plani D F E C proiiciat, hancque solum aeque collustret, ac pars G B F D a duobus istis speculis collustratur. Constat vero ex Catoptricis, eandem fore illuminationem ac si candela in eo loco esset posita, ubi in experimento isto inuenitur esse eius imago, quae pone speculum aeque ab eo distat, ac candela. Sumenda itaque erit speculorum a plano B E distantia, huicque addenda est eorundem distantia a candela. Quo peracto deprehendetur esse quadratum summae distantiarum (L G + L N) ad quadratum tum distantiarum (M E + M N), ut numerus speculorum in L ad numerum speculorum in M, si qui-

si quidem in utroque loco plura fuerint posita.

§. 60. At iam demonstrandum erit, assumta lege §. 51. 52. his experimentis probari legem §. 48. & vicissim. Primo quidem experimento euincitur, eandem fore illuminationem, ubi quadratum distantiae candelarum fuerit ut earum numerus. Eo ergo minor est claritas cuiuis candelae debita, quo maior est hic numerus (§. 51. 52.) adeoque & quo maius quadratum distantiae. Quare erit reciproce ut hoc quadratum.

§. 61. Addimus analyticam huius positionis demonstrationem. Sit numerus candelarum in $A = n$, illuminatio inde nascens $= I$, quam ponamus constantem, erit per hypothesin illuminatio cuique candelae debita $= I : n$, quam faciemus $= c$, ut sit $c = I : n$. At per experimentum est $n =$ quadrato distantiae, qua dicta $= d$, erit $n = dd$, adeoque ob $c = I : n$, erit $c = I : dd$, siue ob I const. $c \backsim 1 : dd$. Eodem modo procedit demonstratio, secundo adhibito experimento, si in vicem candelarum substituamus candelae imagines, quas specula exhibent.

EXPERIMENTVM III.

§. 62. Rectae A B insistat planum album. In C ponatur candela unica vel plures, in D vero aliae numero plures quam in C. Denique in E F erigatur planum opacum quod umbram candelae C proiiciat in B, candelarum D autem in A. Quo facto is quaerendus tentando candelarum situs, quo a punctis illuminandis Fig. 3.

nandis

nandis A & B aeque distent, planumque ibi aeque illuminent. Quo reperto, mensurantur anguli incidentiae C A B, D B G, atque horum sinus deprehendentur esse in ratione numeri candelarum in C & D. Hoc experimento euincitur, legem utramque §. 51. 53. ab inuicem pendere, atque sese mutuo probare.

EXPERIMENTVM IV.

§. 63. Posita iterum candela in C, altera priori & claritate & magnitudine aequalis super recta B D ita ponatur, ut planum in A & B aeque illuminetur, v. g. in H; atque reperientur sinus angulorum incidentiae reciproce esse ut quadrata distantiae candelarum a punctis A & B. Et hoc iterum experimento probatur legum §. 48. 53. congruentia, qua altera alteram firmat. Utrumque hoc experimentum & speculis absolui posse, vel me tacente, quilibet facile perspicit.

§. 64. Plura adhuc & ab his, quae iam in medium protulimus, diuersissima dantur experimenta, quibus leges istae inuicem firmari possunt. At cum principia, quibus innituntur, in sequentibus tantum euoluere liceat, eousque eorum descriptio erit differenda. Descriptis interim ita fruamur, ut modum ostendamus, quo illuminationes inter se conferri diuersissimae possunt. Sic enim in antecessum parabuntur media, quibus posthac utemur, cum varii illuminationis gradus erunt definiendi.

§. 65.

§. 65. Ex dictis iam euidens est, pluribus casibus in potestate esse, illuminationem quamlibet ita immutare, ut non modo datae illuminationi euadat aequalis, verum & innotescat, qua ratione quantumque aucta vel imminuta sit. Quodsi enim vel luminis a charta siue plano illuminato distantia, vel huius positio mutari possit, utique illuminationem cuicunque datae aequalem reddere dabitur. Immutata enim illuminatio semper erit directe ut sinus anguli incidentiae, reciproce ut quadratum distantiae.

§. 66. Comparanda sit v. c. illuminatio chartae a luna cum eiusdem illuminatione a candela proueniens. Facile iam patet pluribus id fieri posse modis. Ita vero, qualicunque utaris, charta & lunae & candelae exponenda est radiis, ut ea pars quae a luna collustratur, obiecto quodam interposito, radiis candelae subducatur, & vicissim. Qua seruata lege, vel angulus incidentiae, vel candelae distantia augeri minuiue poterit, usque dum utraque pars chartae aeque videatur illuminata. Similique modo & pluribus adhibitis candelis, illuminationem chartae ab eis productam cum illuminatione lunae vel alius cuiusuis luminis comparare licebit. At, probe notandum, his experimentis nondum inueniri rationem inter ipsorum luminum claritatem, neque comparari posse claritatem chartae illuminatae cum claritate corporis luminosi, quod eam collustrat. Prius tamen facilius assequi licet, si non modo obliquitatis incidentiae, verum & magnitudinis adpa-

rentis habeatur ratio. At his omnibus infra fuſius explicandis erit locus.

§. 67. Supereſt, ut quasdam adhuc euolvamus notiones, quas interſe diſtinxiſſe in ſequentibus iuuabit. Iam notauimus ex quovis puncto ſuperficiei luminoſae quaquauer-
F.4 ſum emanare radios. Sit igitur eiusmodi ſuperficies AB, cui obuertatur alia CD ab ea colluſtranda. Ex quouis ergo puncto E qui emanant radii in totam ſeſe diffundunt ſuperficiem CD. In ſequentibus quandoque occurret, ut eorum colligatur ſumma, ut & ſumma claritatis, quam in CD, ratione habita diuerſitatis diſtantiae & anguli incidentiae, producere valent. Quare conuenit eos hocce reſpectu a ceteris radiorum modificationibus diſtinguere. Eos itaque *radios e puncto diſperſos* vel *diuergentes* vocabimus.

§. 68. Contra ea in quoduis punctum F ſuperficiei CD e ſingulis ſuperficiei AB punctis incidunt radii, quorum denſitas illuminationis gradum conſtituit eum, qui ſuperficiei luminoſae AB debetur. Et horum quoque radiorum ampliſſimus in ſequentibus erit uſus. Quare ut a ceteris diſtinguantur, eos vocabimus *radios in datum punctum coincidentes*.

§. 69. Alia inſuper occurrit diſtinctio utique notanda inter puncta, ſiue lucida ſint ſiue illuminata. Aut enim iſta conſideramus veluti ſolitaria, hucque referas *puncta radiantia* proprie ſic dicta, quae veluti in vacuo ſola concipiuntur, lumen quaquaverſum libere diffundentia. Aut puncta iſta ſpectamus tamquam partem ſuperficiei, qualia in § praecedente

dente erant puncta E, F. Quae ut a prioribus distinguantur *puncta superficiei* nominabimus. Ceterum quod de iis in genere notandum, ista nequaquam consideramus ceu puncta geometrica, quippe quae omni carent extensione, verum ut puncta physica, quae vel unam, vel duas, vel denique tres habent dimensiones quantumvis exiguas, prout pars sunt vel lineae, vel superficiei vel corporis. Recepta iam est in opticis ista notio, neque in errorem inducet, cum quid sibi velint, hic praemoneamus. Geometrica erunt, simul ac demonstrata fuerit luminis in infinitum non modo diuisibilitas verum realis divisio. Nobis sufficiat ea hic spectare velut infinite parua. Ceterum & aliis utemur loquendi modis magis genuinis, & in geometricis receptioribus, quoties vitanda est vel obscuritas vel amphibolia.

CAPVT II.

De lumine directo, huiusque mensura & gradibus.

§. 70. Quas in praecedenti capite discussimus, positiones, quibusque iam utemur, hae fere sunt: Illuminationem nempe vidimus decrescere reciproce ut quadratum distantiae (§. 48.) directe vero ut sinum anguli incidentiae (§. 53.) eandem vero esse maiorem, prout maior fuerit luminis, quae obiecto illuminato obuertitur superficies (§. 52.) quoque denique intensior, qui

proprius est lumini, splendor (§. 39.) Conditiones vero istae, a quibus singulis pendet illuminationis gradus, ut infinitis fere modis esse possunt diuersissimae, ita totidem quoque inde existunt illuminationis modificationes, quarum praecipuas veluti species hoc capite ita perlustrabimus, ut quae inde fluunt theoremata in sequentibus Photometriae partibus principiorum instar esse possint.

§. 71. Antequam vero eo deueniamus alia eaque grauissima enodanda est quaestio parum adhuc ventilata. Vidimus illuminationem pendere a situ superficiei illuminatae, eamque minorem esse, ubi maior fuerit radiorum luminis in superficiem istam incurrentium obliquitas, siue ubi minor obtinet angulus incidentiae. Ut adeo non perinde sit, qualis superficiei illuminatae sit situs, qualisque ad radios incidentes inclinatio. At iam quaeritur, an secus res se habeat ratione situs ipsius superficiei luminosae, quae radios suos in obiectum diffundit. De his altum apud auctores plerosque qui de illuminatione objectorum scripserunt reperies silentium. Unus est, ni fallor, Cel. EVLERVS, qui naturam luminis maiori rimatus ακριβεια, maiorique ingenii acumine, huius quoque circumstantiae rationem habuit, eamque, cum in claritatem Planetarum curatius inquireret, in calculum induxit. Vid. eius *Reflexions sur les divers dégrés de lumiere du Soleil & des autres Corps celestes*, in Commentariis, qui inscribuntur. *Memoires de l'Academie de Berlin.*

§. 72.

§. 72. In elaboratissima ista dissertatione, Cel. hic Auctor, siquidem probe eum intellexi, diserte ait, perinde esse superficiei luminosae situm, atque eandem prodituram fore illuminationem, utcunque radii oblique emanent. Hinc eam esse statuit illuminationem corporis a Sole collustrati, quae prodit, si dimidia eius superficies quae nobis est visibilis, in superficiem planam extensa concipiatur, solem adeoque collustrare non ratione disci plani, verum ratione areae superficiei verae, quae oculis est obiecta. Similiter montes lunares, dum augent corporis huius superficiem, ipsius quoque claritatem augere & vim illuminantem statuit. Hanc, si probe memini, ingeniosissimus EVLERVS quaestionis propositae dedit enodationem. Ipsam enim Dissertationem prae me non habeo.

§ 73. At si ista rite sic se habeant, praetermissa videtur distinctio inter claritatem visam & illuminationem, quam maximi esse momenti in superioribus iam notauimus (§.37.) Ita enim, qua late oculis patet corporis solaris superficies helioscopio armatis, aeque sane eam claram videri nemo est, qui temere negabit. Quare hoc tantum supererit, ut disquiramus, an eadem quoque sit illuminationis vis, quae a radiis prouenit limbo solis vicinioribus, ac ea est, quae debetur radiis e centro disci emanantibus? Sic enim cel. EVLERVS calculum suum instruxisse videtur, quasi densitas radiorum ubique sit in ratione areae superficiei, ex qua emanant, nulla habita ratione situs plus minusue obliqui.

§. 74. Huius vero quaeſtionis diſcuſſionem eam dare, quae demonſtratione nitatur omnibus numeris abſoluta, cum a principiis pendeat poſtmodum ſaltem ſtabiliendis, hactenus nondum licet. Certitudinem tamen ipſi non fore defuturam ſpero, ſi cum experientiam tum propoſitiones quasdam in prima Optices parte ſatis ſuperque demonſtratas in ſubſiduum vocemus, quarum ope claritatem viſam cum illuminatione conferre poterimus. Quem in finem ceu vel in vulgus notum aſſumimus, radios e quouis puncto corporis, quod intuemur, in ſuperficiem oculi externam ſeſe diffundentes, ita ibi refringi, ut in retina oculi in punctum coincidant, ibique puncti iſtius depingant imaginem. Hanc autem eo fore clariorem, quo plures radii in punctum iſtud retinae coincidunt, vel per ſe eſt euidens.

§. 75. Hinc iam prono fluit alueo, claritatem iſtam imaginis maiorem eſſe, quo maior fuerit radiorum denſitas quoque maior pupillae apertura. Hanc vero aperturam, ſiue ſolis limbum ſiue eius centrum intueamur, conſtantem eſſe, tuto aſſumere licet. Ut adeo claritas imaginis ſolaris, & cuiuslibet ipſius partis ſtatuenda ſit ſimpliciter ut radiorum denſitas. Ex his vero dictis conficitur, denſitatem radiorum ſolarium eandem eſſe, ſiue e limbo ſiue e centro diſci ſolaris in oculum irruant, quippe imago ex omni parte aeque ſtatuenda eſt clara, cum partes diſci ſolaris eadem gaudere claritate videamus.

§ 76. At hoc ipſo porro neceſſario concludendum eſt, e quolibet diſci Solaris puncto

eun-

eundem in datam superficiei oculi partem incidere radiorum numerum, cum ii, qui in totam superficiem oculi sese diffundunt eandem in retina producant partium imaginis claritatem. Quare cum nequaquam mutetur radiorum istorum numerus, si in vicem superficiei istius oculi aliam corporis cuiuscunque substituamus superficiem, consequens sane est, eam in isthac superficie productam iri illuminationem a quauis disci solaris parte, quae proportionalis est spatio quam pars haec in retina oculi occupat, adeoque ergo magnitudini eius, non verae, sed adparenti. En vero iam quorsum haec.

§. 77. Referat circulus ACB discum solarem, quem hic ceu planum statuamus, cuiusque diameter sit AB. Conuexitatem corporis solaris, quatenus diametro huic normaliter insistit, anteriorem oculoque obiectam repraesentet semicirculus AMB, qui ergo diametro AB normabiliter insistere concipiatur. Sit huius superficiei pars quantumuis parua Mm. Ex M, m demittantur perpendiculares m p, MP, atque erit Pp particulae Mm magnitudo adparens, adeoque eius imagini in retina oculi proportionalis. Fig. 5.

§. 78. At vero huic imagini proportionalem esse vidimus radiorum numerum in oculi superficiem incidentium, qui adeo, cum emanent cuncti e parte Mm, necessario ipsi Pp esse debent proportionales. *Erit ergo numerus radiorum e data quauis superficiei solaris parte* Mm *in datam superficiem incidentium in ratione partis in diametro disci abscissae* Pp.

§. 79. Quodſi ergo conſideremus, eo maiorem eſſe illuminationis gradum, quo plures in eandem ſuperficiem incidunt radii, quippe denſiores ſunt, utique euictum eſſe deprehendemus, *illuminationis augmentum a quavis ſuperficiei particula* mM *procedens non eſſe ut huius particulae ſpatium verum* mM, *verummodo ut adparens* pP, *quod in diſco ſolis obtegit.* Hoc vero ab illo differet ſimulac ſuperficies mM fuerit ad AP inclinata. Etſi ergo, dum ſolem intuemur particula quaelibet mM aeque *videatur* clara, *illuminatio* tamen inde proueniens minime eadem erit. Ut adeo perperam cum claritate viſa & hoc reſpectu confundatur. Alio quoque reſpectu perperam id eſſe factum iam ſupra vidimus (§. 37.)

§. 80. Quoniam radii ſolares in oculum vel datam quamuis ſuperficiem incidentes eam ſequuntur directionem, quae ad planum diſci normalis eſt, patet omnes haberi poſſe ceu normales ad diametrum AB. Quare ii ſaltem normaliter e ſuperficiei ſolis emanant, qui e centro diſci proficiſcuntur. Ceteri omnes plus minuſue emanant oblique. Naſcitur hinc vel ſua ſponte idea *anguli emanationis*, qui ad ſuperficiem, ex qua radii luminis effluunt, eodem ſe habet modo, quo ſe habet angulus incidentiae ad ſuperficiem ab iſtis radiis illuminatam. Eſt vero angulus inter directionem radii luminis & ſuperficiei luminoſae interiacens.

§. 81. Cum in exemplo praeſenti directio radiorum ſit ſecundum rectas MP, mp, erit angulus emanationis angulo mMP e vertice oppoſi-

oppositus ipsique ergo aequalis. Unde cum sit mMP = PDM, erit arcus AM mensura anguli emanationis, & MP ipsius sinus. Sed ob mn = pP, erit Mm: Pp = MD : MP. Quare spatium mM, ex quo radii effluunt erit ad quantitatem illuminationis, quam hic refert abscissa Pp, ut sinus totus ad sinum anguli emanationis. *Ut adeo vis illuminans simulque & ipsa illuminatio decrescat in ratione sinus anguli emanationis.*

§. 82. Propositio haec, ut maxime est palmaria, ita eam fusius exponere convenit, cum amplissimus eius in tota Photometria sit usus. Primo enim exinde manifesto sequitur, *nequaquam perinde esse, qualis sit superficiei illuminantis situs.* Immineat plano AB superficies luminosa CD ita ut ipsi sit parallela, utique radii GP cum sub angulo recto & emanent & incidant, maximam producent in P illuminationem. Mutato vero ipsius superficiei situ, eadem manente eius distantia GP & magnitudine EF, minor euadet illuminatio in ratione sinus anguli emanationis PGF, unde planum in P minus illuminabitur. Fig. 6.

§. 83. Contra ea secus se habebit res, si quaerenda sit illuminationis quantitas in A, ubi radii AG normaliter effluunt e superficie EF, oblique vero e superficie CD. Cum enim angulus incidentiae GAB in utroque casu sit idem, erit illuminatio in primo casu ad eandem in secundo, ut sinus totus ad sinum anguli emanationis CGA. Unde ergo patet, *illuminationem alterari sive superficiei illuminantis siue plani illuminati mutetur situs, manente & distantia & magnitudine prioris,*

§. 84. Novam hanc virium illuminantium legem ex unica hactenus obſeruatione deductam aliis quoque firmare obſeruationibus nequaquam erit ſuperuacaneum, inter quas, quae vel frequentiſſime occurrit, ſequens eſt. Quodſi murum album vel a ſole vel a caelo illuminatum quacunque intueamur ex parte, manente pupillae apertura, aeque iſte in omni caſu ad ſenſum videbitur albus, aequalique claritatis gradu conſpicuus, hoc tantum diſcrimine, ut quatenus in priori caſu murus iſte inſtar ſpeculi rudioris radios quosdam reflectit, ex ea parte, qua radii reflexi procedunt, aliquanto clarior videatur. Quod in poſteriori caſu ſecus eſt, cum undequaque a dimidio caeli hemiſphaerio colluſtretur. Idem quoque obſervare licebit, ſi planum album ſub diu ita ponatur, ut a toto caeli hemiſphaerio, cum nubibus aeque albidis obtectum eſt, vel in crepuſculo paullo ante ſolis ortum vel paullo poſt eius occaſum colluſtretur. Sic enim planum iſtud, quacunque ex parte intuearis, aeque ad ſenſum clarum videbis. Hoc vero cum obtineat, eodem modo, quo ſupra euincetur, illuminationem eſſe ut ſinus anguli emanationis. Plura experimenta, quibus & haec & aliae inſuper firmantur poſitiones infra occurrunt, hunc ipſum in finem data opera inſtituta.

Ut iam, quod ſupra nos eſſe paſſim facturos promiſimus, (§. 18.) & huic propoſitionis qualemcumque addamus demonſtrationem, ſequentem tentabo, quam admittere Fig. 7. iſta propoſitio videtur. Sit AB ſuperficies corporis

poris luminosi, cuius quaeuis particula lumen quaquauersum diffundat. Utcunque vero concipiamus luminis emanationem, concedendum erit, singulas corporis lucentis particulas esse in continua agitatione, ita ut particula C ab omnibus ipsi continguis feriatur easque vicissim percutiat. Has vero in hemisphaerio circum eam esse sitas, vel per se est euidens, cum in superficie posita statuatur. Quare motum vel lumen in partem aversam diffundet per alterum haemisphaerium. Demonstrandum iam est, luminis quantitatem secundum CF emissum esse ad lumen quod normaliter euibratur secundum directionem GC, ut sinus anguli emissionis FCB ad sinum totum. Quod ut fiat assumemus, vim, quae lumen secundum CF eiaculatur, deberi particulis in recta DC sitis. Sit haec vis = CD. Resolvatur in normalem DE & parallelam EC, haec ad emittendum lumen nil confert, quod ergo sola vi DE euibratur. Est vero DE ut sinus anguli emissionis, quare & in hac ratione vis ista decrescit. Quodsi ergo lumen emissum ceu effectum spectemus, huncque causae statuamus proportionalem, consequens erit, quantitatem luminis oblique emanantis esse in ratione sinus anguli, sub quo emanat.

§. 86. Hoc itaque vel simili modo res ista videtur concipienda. Quodsi quis secundum NEWTONVM statuere velit, cum lumine emigrare quoque corporis luminosi particulas, utique simili utetur demonstratione. Quo enim vis DE, qua evibrantur, erit minor, eo quoque minor erit particularum numerus, quae simul

ſimul eiiciuntur. Celeritas enim, qua per rectam C F procedunt eadem erit, quicunque ſit angulus emiſſionis. Ceterum nobis perinde erit, qualicunque ratione poſitio noſtra demonſtretur, cum ſufficiat eam ex obſervationibus eſſe deductam, unde perquiſitioni iſti diutius non immorabimur, id potius acturi, ut elegantiſſima, ad quae iſta propoſitio nos deducit, theoremata dilucide exponamus.

THEOREMA I.

Fig. 8. §. 87. *Ex quauis ſuperficiei luminoſae parte infinite parua* A B *eadem in datum punctum vel datam ſuperficiem* C *incidit radiorum quantitas, quae incideret ex ſuperficie normali* A D *aeque luminoſa.*

DEMONSTRATIO.

In utroque enim caſu illuminatio eſt in ratione compoſita ſuperficiei illuminantis & ſinus anguli emiſſionis. (§. 52. 81.) Quare priori reſpectu illuminatio normalis erit ad illuminanem obliquam ut D A ad A B. poſteriori vero reſpectu ut ſinus totus ad ſinum anguli emanationis C B E, adeoque ut A B ad D A, ſiue reciproce ut ſuperficies. Quae ergo rationes cum ſeſe deſtruant, patet propoſitum.

THEOREMA II.

Fig 9. §. 58. *Lumen a ſuperſicie* A B C D *in* P *coincidens, idem eſt ac ſi incideret a ſuperficie* a b c d *priori parallela, iiſdem lateribus pyramidis* P A B C D *terminata & aeque luminoſa.*

DEMON-

DEMONSTRATIO.

Etenim in utroque casu illuminatio est directe ut superficies & reciproce ut quadratum distantiae (§. 52. 48.) quippe anguli emanationis & incidentiae ponuntur iidem. At vero superficies sunt directe ut quadratum distantiae, quare & hic duae istae rationes sese destruunt. Patet ergo illuminationem in utroque casu esse aequalem.

THEOREMA III.

§. 89. *Sit superficies luminosa* A B C D, *quae planum in* P *positum collustret. Sit porro alia superficies* a b c d *ad priorem utcunque inclinata, sed iisdem pyramidis* P A B C D *lateribus terminata, dico illuminationem in utroque casu fore eandem.* Fig. 10.

DEMONSTRATIO.

I°. Utraque superficies ponatur infinite parua, atque in C D concipiatur tertia quaedam superficies secundae a b c d parallela, eidemque pyramidi inclusa, per Theorema I. constat, utramque planum in P aeque fore illuminaturam. At per Theorema II. illuminatio a tertia hac superficie producta eadem erit ac ea, quae prouenit a superficie a b c d. Quare utraque superficies A B C D & a b c d planum in P aeque illuminabunt. Cum enim utraque ponatur infinite parua, aequalis quoque erit angulus incidentiae, quippe planum in P hic spectatur velut infinite paruum.

II°. Quodsi iam superficies istae non fuerint infinite paruae, nil impedit, quo minus pyramis in infinitas paruas partiatur, atque vel

vel per ſe patet, ſingulis iam demonſtrata poſſe adplicari. Cum ergo cuiuis ſpatiolo in ſuperficie A B C D eadem debeatur illuminatio, quae debetur ſpatiolo analogo in ſuperficie a b c d, conſequens eſt illuminationem totalem in utroque caſu fore illuminationum iſtarum infinite paruarum & aequalium ſummam, ut adeo euidens ſit eam in utroque caſu fore aequalem.

THEOREMA IV.

§. 90. *Si utraque ſuperficies* A B C D, a b c d *ſit utcunque curua, ſed aeque luminoſa iisdemque pyramidis lateribus terminata, eadem erit plani in* P *illuminatio in utroque caſu.*

DEMONSTRATIO.

Pyramis P A B C D iterum diuiſa concipiatur in innumeras infinite paruas communem verticem in P habentes, atque per theorema praecedens (§. 89. I.) patet ratione cuiusuis earum verum eſſe propoſitum, unde ergo & verum ſit neceſſe eſt de earum ſumma.

§. 91. *Poterit ergo in vicem iſtarum ſuperficierum ſubſtitui ſegmentum ſuperficiei ſphaericae iiſdem pyramidis lateribus terminatum & aeque luminoſum; atque idem obtinebitur illuminationis gradus.*

§. 92. *Perinde quoque erit, ſiue maior ſiue minor ſit ſphaerae iſtius diameter.* Neque opus eſt ut ſuperficies P ſit in centro ſphaerae, dummodo huius ſegmentum latera pyramidis non excedat, verum ab iis terminetur.

§. 93. *Quodſi ergo ſuperficies* A B C D *ſit infinite extenſa planoque in* P *parallela, ſegmentum iſtud ſphaerae*

sphaerae quod ipsi substituere licet abibit in hemisphaerium. Ut adeo in utroque casu idem obtineatur illuminationis effectus.

§. 94. *Idem obtinet, si planum* P *superficiei* A B C D *sit infinite vicina.* Eodem enim modo illuminabitur ac fieret ab hemisphaerio aeque luminoso cuiuscunque diametri.

§. 95. Cum ergo in singulis his casibus ea requiratur conditio, ut superficies a b c d quae in vicem superficiei substituitur iisdem pyramidis lateribus terminetur, atque hac seruata lege superficiei distantia qualiscunque esse possit, consequens est, *ut illuminatio, quae debetur magnitudini, distantiae & positioni superficiei luminosae, simpliciter ad magnitudinem adparentem reduci possit.* Haec enim per figuram pyramidis determinatur, ad quam cetera omnia reduximus.

§. 96. Vidimus enim (§. 87) situm superficiei obliquum reduci posse ad normalem vel alium quemcunque, iisdem tamen pyramidis lateribus terminatum. Qua denuo seruata lege porro euicimus distantiam qualemcunque reduci posse ad quamlibet aliam (§. 88. 89.) sic ut manente pyramidis ad superficiem in P habitu & positione, eadem quoque maneat illuminatio. Sic enim in primo casu superficies A B cum maior sit superficie A D maiorem producere deberet effectum, nisi in eadem ratione ob angulum emanationis A B D minorem minor foret radiorum emanantium quantitas. Similiter in secundo casu illuminatio a superficie a b c d proficiscens minor fit ob imminutum spatium, at in eadem ratione intenditur ob maiorem vicinitatem. Unde cum in

Fig. 8.

Fig. 9.

utro-

utroque hoc casu effectus contrarii sese destruant, hinc concinnas istas eruere licuit positiones, quibus in sequentibus maximo cum compendio calculi utemur.

§. 97. Cum itaque distantia, magnitudo & positio obiecti luminosi ad solam eius magnitudinem adparentem reducantur, consequens est; *Illuminationem in quocunque casu simpliciter pendere 1°. ab obliquitate incidentiae, 2°. a magnitudine luminis adparente, 3°. ab eiusdem intensitate siue ab ipsius splendore.*

§. 98. Magnitudo adparens est angulus solidus lateribus pyramidis qualiscunque vel coni terminatus, cuius ergo quantitatem metitur segmentum superficiei sphaericae, iisdem pyramidis lateribus terminatum. Apex vero pyramidis cum sphaerae istius centro coincidit, atque in eo positum censetur planum illuminatum quod hic ceu punctum est spectandum. Hoc ergo modo determinabitur in omni casu vis radiorum coincidentium illuminans (§. 68.) *Etenim eorum quantitate per aream spatioli illuminati diuisa prodit spatioli illuminatio siue claritas.*

§. 99. Quoniam ergo ad segmenta sphaerica reduximus illuminationis computum, atque perinde est diametri magnitudo, (§ 92. 98.) ita ipsius semidiametrum siue radium in sequentibus constanter per unitatem efferemus.

§. 100. Cumque porro planum quoduis, cum maxima est eius illuminatio, ab hemisphaerio illuminetur, hoc quippe casu quacunque ex parte radii incidere possunt reapse incidunt; ita illuminationem ab hemisphaerio procedentem ut maxima est, omnibus veluti nume-

numeris *absolutam* vocabimus. Jam vero vidimus hoc obtinere 1°. ubi planum illuminandum est in ipsa corporis illuminantis superficie siue eam tangit (§. 94.) 2°. Ubi superficies illuminans planum illuminandum undique cingit vel obtegit, veluti telluris superficiem obtegit coelum. 3°. Ubi superficies planum collustrans huic est parallela & velut infinite extensa (§. 93.) Singulis hisce casibus, eodem manente cuiusuis partis superficiei luminosae splendore, eadem obtinet illuminatio, eaque maxima vel absoluta.

§. 101. Hinc iam vel sua sponte fluit propositio sequens eaque elegantissima: *Si quod tegit omnia caelum, qua late patet oculis, eodem illusceret splendore, quo solem augustissimo suo iubare splendere videmus, tunc demum telluris superficies eodem modo illuminaretur, ac si esset in ipsa solis superficie posita.* Quantum ergo vi solis illuminanti siue claritati obiectorum terrestrium, ob immensam solis distantiam detrahatur hinc patet apertissime. Caue tamen statim concludas, illuminationem absolutissimam se ad eam habere, quae in hoc qui actu est rerum statu obtinet, ut se habet totum, quod intuemur, hemisphaerii coelestis spatium ad magnitudinem disci solaris adparentem. Hanc equidem intulit consequentiam cel. SMITHIVS, in praeclaro, quod de Optica scripsit, systemate claritatem lunae & solis inuicem comparaturus. At humani quid passum esse summum virum, & infra videbimus, & vel inde patet, quod, dum hanc inde deducere volumus conclusionem, ratio diuersitatis angulorum incidentiae

habenda ſit. Quodſi enim planum quoddam ab hemiſphaerio colluſtratur, omnes ſane anguli incidentiae ſimul occurrunt. Quod vero ſecus eſt, ubi illuminatio tantum procedit a ſphaerae ſegmento, quale in hoc caſu ſiſtit diſcus ſolaris. Hanc autem ob cauſſam rationem iſtam duplo fore minorem ſtatim videbimus. Ceterum propoſitionem quam hic expoſuimus ad lunam plenam adplicauit cel. Auctor mox citatus, cui, ſalua concluſione inde deducta, aeque ac ſoli adplicabilis eſt.

§. 102. Hiſce iam ita praeſtructis, ſpecialiores calculo perluſtrabimus caſus, cui inſtituendo principia iſta vel maxime ſufficiunt. Vidimus vero, cuicunque obiecto luminoſo ſubſtitui poſſe ſegmentum ſphaerae, quod ipſius referat magnitudinem adparentem. Quod ut fieri poſſit, conſideranda venit obiecti luminoſi cum figura tum magnitudo adparens. Quae a figura pendet illuminationis varia modificatio, eam ad tres caſus reducemus maxime uniuerſales. 1°. Ponemus limbum corporis, quatenus oculis obiicitur eſſe circularem, quo caſu ſegmentum ſphaericum erit circulare, circuloque ſphaerae vel maximo vel minori terminatum. Huc referas coeli hemiſphaerium, ſolem, lunam plenam, cet. 2°. Limbum corporis luminoſi ſtatuemus rectis lineis terminatum. Quo caſu ſuperficiei ſphaericae ſegmentum terminabitur circulis ſphaerae maximis, eritque vel triangulum ſphaericum, qualia in trigonometria ſphaerica ſubiiciuntur calculo, vel denique ex ſimilibus triangulis compoſitum, ſiue triangulatum. Huc

referas

referas coeli faciem, quatenus per aedium fenestras vel alias quascunque aperturas rectilineas conspicuum est. 3°. Occurrunt casus infiniti, quibus limbus luminis adparens neque circularis nec rectilineus est, verum vel alia quacunque terminatur curua, vel denique figuram habet ex varii generis aliis compositam. Ad quam ultimam classem referas lunam lumine plus minusue orbam, coelum aedium faciebus vel montium ex parte obtectum, cet.

§ 103. In singulis istis casibus adparens corporis luminosi figura ita sumenda est, qualem se sistit oculo in puncto plani illuminandi posito. Porro ut angulorum incidentiae haberi possit ratio, superficiem illuminandam ponemus infinite paruam. Hoc enim modo illuminationem pro dato quouis plani illuminati loco vel puncto definire licet. Denique ut iam passim in scriptis opticis occurrit idea *coni luminosi*, cuius apex est datum quoduis punctum radians, ita similis hic spectandus venit, situ tamen inuerso. Huius quippe apex est in plano illuminando. Illum vero, ut ab hoc distinguamus, *conum radiorum diuergentium*, hunc *conum radiorum coincidentium* vocabimus. (§. 67. 68.) Uterque abit in pyramidem vel aliud quodcunque solidum cuspidatum, simul ac vel plani illuminati vel corporis lucentis limbus adparens terminetur lineis rectis aut qualicunque modo incuruatis.

§. 104. Sit eiusmodi solidum pyramis P A B C D. Quodsi ergo huius basis A B C D collustretur a puncto radiante P, patet radios in eam incidentes omnes e puncto isto ema- Fig. 10.

nare eosque esse diuergentes. Ut adeo hic obtineat prior casus, eritque pyramis radiorum diuergentium. Inuertendo iam ponamus basin A B C D esse superficiem luminosam, eamque collustrare punctum P in plano quodam situm. Euidens est ex quouis superficiei A B C D puncto radios incidere in P; Hoc uero obtinente *pyramis radiorum coincidentium* nominanda venit. *Luminosa* in utroque casu dicitur, quia ex meris radiis luminis est composita, qui omnes e vertice P vel emanant, vel in istum collimant.

§. 105. Quoniam punctum P semper spectatur ceu particula cuiusdam superficiei infinite parua, patet non perinde esse, qualis sit pyramidis istius ad eam inclinatio. Hac enim mutata, mutabuntur quoque anguli emanationis vel incidentiaè, adeoque & radiorum quantitas & densitas. Hanc vero maiorem esse, ubi basis A B C D superficiei in P normaliter imminet, vel ab hoc situ parum recedit, ac est ubi maior obtinet inclinatio, vel per se est euidens.

§. 106. Assumta ergo hac coni vel pyramidis luminosae notione, patet, utrumque casum eodem absolui posse calculo, quippe in utroque considerandi veniunt anguli emanationis & incidentiae, vis illuminans & illuminatio, basis A B C D & particula plani vel superficiei in P. Cumque porro radiorum quantitas decrescat in ratione composita sinuum angulorum emanationis & incidentiae, patet analogiam istam omnibus numeris esse absolutam, atque mutatis saltem debite terminis utrinque

in

in oppositos, substitutione ista nil esse facilius. At iam ad casus specialiores deueniamus, primumque euoluamus eum, quo limbus corporis luminosi adparens est circularis, atque ut a simplicioribus progrediamur ad magis composita, ponamus lumen istud circulare plano illuminando normaliter imminere. Quo adeo casu conus radiorum coincidentium ipsi normaliter insistit.

§. 107. Referat itaque A D B hemisphaerium, hocque insistat plano A B, atque in centro C illuminanda sit plani istius particula infinite parua. In hanc coincidant radii per conum M C S, velut e segmento sphaerae M D S, quod lumini circulari substituere licet, emanantes. (§. 91. 102.) E centro C erigatur normaliter radius sphaerae C D, atque ducta M S ipsique infinite vicina m s, spatiolum M S s m referet zonulam sphaerae infinite paruam. Quaerendum iam sit illuminationis incrementum huic zonulae debitum. Cum zonula ista plano A B sit parallela eiusque axis sit recta normalis C D, patet angulum incidentiae singulorum radiorum fore = M C A, huiusque ergo sinum = P M = C Q. Sed area zonulae, cui proportionalis est radiorum in C incidentium quantitas est ut particula q Q in axe abscissa. Quare illuminatio erit ut factum ipsius Q q in sinum incidentiae C Q ductae. Compleatur quadratum C D E B, atque ducta diagonali C E, erit Q R = C Q, adeoque factum istud C Q. Q q = rectangulo Q R r q. Ut adeo quaesitum illuminationis augmentum efferri possit per spatiolum Q R r q. Cumque Fig. 11.

ergo cuiuis zonulae simile spatiolum in triangulo C D E respondeat, euidens est illuminationem summae zonularum siue segmento M D S debitam, efferendam esse per summam spatiolorum, adeoque per quadrilaterum Q R E D. *Quantumuis ergo sit sphaerae segmentum* M D S, *patet ducta tantum recta* M S, *illuminationem ipsi debitam repraesentatum iri per spatium* Q R E D. *atque eam fore ad illuminationem absolutam, quae toti debetur hemisphaerio, ut spatium istud* Q R E D *ad totum triangulum* C D E. (§. 100.) At concinnior euadet haec positio sequentem in modum.

§. 108. Cum C E sit diagonalis quadrati, cuius latus semidiametro vel radio sphaerae aequalis, erit area trianguli C D E aequalis dimidio quadrato radii. Sed area trianguli C Q R = dimidio quadrato lateris C Q, siue quod idem est, dimidio quadrato cosinus anguli D C S, quo a priori subtracto, remanet spatium Q R E D dimidio quadrato sinus eiusdem anguli D Q S aequale. Est vero angulus iste D C S semidiameter luminis adparens, adeoque, cuncta duplicando, sequens inde elicitur

THEOREMA V.

§. 109. *Si obiectum luminosum, cuius limbus adparens est circularis, plano cuidam normaliter immineat, erit illuminatio hinc nascens ad illuminationem absolutam, ut quadratum sinus semidiametri adparentis ad quadratum sinus totius.*

§. 110. Hoc ipsum theorema Cel. EVLERVS in scripto supra iam citato (§. 71.) ex suis quoque principiis, etsi ab his, quibus usus sum, diuersis, eruit. Inopinati huius consensus

ſus ratio in figura circulari eſt quaerenda. Aliam enim ſi aſſumas figuram ſtatim euaneſcet iſte conſenſus. Duobus adhuc caſibus infra occurret hoc, quod ita vocare liceat, calculi *phaenomenun*, e circulari & ſphaerica figura naſcens.

§. 111. Cum itaque illuminatio abſoluta per quadratum radii circuli exprimatur, eademque inſtar moduli eſſe poſſit pro ceteris definiendis, ſic eam conſtanter per unitatem exprimemus, niſi diſerte moneatur contrarium. Unitas enim iſta unice adhuc pendet a ſplendore luminis quo planum quoduis colluſtratur. Ut adeo manente hoc ſplendore unitas iſta conſtans ſit. Quare eo minus ab ea recedere opus eſt, cum & ſinus angulorum per eam eiusque partes exprimemus.

§. 112. Cum igitur illuminatio ſit ut quadratum ſinus ſemidiametri adparentis, ilico hinc eluceſcit, quod ſupra innuimus (§. 101.) falſo concludi illuminationem abſolutam eſſe ad eam quam producit corpus luminoſum, cuius figura adparens terminatur circulo ſphaerae minori, in ratione areae totius hemiſphaerii ad aream diſci adparentis. Haec enim ratio eſſet ut unitas ad duplum quadratum ſinus dimidii ſemidiametri adparentis. At eſſe debet ut unitas ad quadratum ſinus ſemidiametri adparentis. Haec vero ratio pro minoribus ſphaerae ſegmentis, quale ſiſtit diſcus ſolaris, duplo fere minor eſt illa.

§. 113. Ex dictis iam fluit alia poſitio non minus concinna quam quidem gratis potius aſſumtam quam demonſtratam paſſim inuenias.

Spectat vero corpus luminosum, cuius figura sphaerica est, veluti sol, luna, ceterique planetae. Discum huiuscemodi corporis adparentem circularem esse vel per se est euidens. Unde utique illuminatio plani, quod ipsi normaliter obuertitur, erit ut quadratum sinus semidiametri ad parentis (§. 109.).

Fig. 1. §. 114. Sit igitur CB semidiameter solis vel cuiuslibet corporis luminosi sphaerici. Huic normalis sit axis CAE, in quo sit planum illuminandum E. Ex hoc puncto ducatur recta ED, quae superficiem luminis siue circulum BDA tangat, ad quam ducatur normalis CD ex centro C. Erit EC distantia plani E a centro, & angulus DEC erit corporis luminosi semidiameter adparens, cum CD sit vera. Quod si iam CE spectetur ut sinus totus, erit CD sinus anguli CED siue semidiametri adparentis, adeoque sinus totus se habebit ad sinum semidiametri adparentis, ut se habet distantia centri EC ad semidiametrum veram CD. Erit ergo sinus semidiametri adparentis reciproce ut distantia EC, Quare eius quadratum reciproce erit in ratione duplicata distantiae centri. At quadratum sinus semidiametri adparentis est ut illuminatio plani in E: Unde ergo consequitur sequens

THEOREMA VI.

§. 115. *Si corpus luminosum, fuerit sphaericum, illuminatio absoluta in* A *se habebit ad quamlibet aliam normalem, in* E, *ut se habet quadratum distantiae* CE *ad quadratum semidiametri corporis* CA, *adeoque reciproce in ratione duplicata distantiae objecti* E *a centro corporis* C.

§. 116.

§. 116. Ut ergo illuminationem absolutam per unitatem designauimus, (§. 111.) ita quoque semidiametrum CA per eam efferemus Hinc enim obtinebitur cuiusuis alius illuminationis gradus, unitatem per quadratum distantiae obiecti a centro C diuidendo. Plura quoque sunt, quae hic notare convenit.

§ 117. Primo quidem ex his manifestum est, pro corporibus sphaericis veram esse positionem. quam hactenus tunc saltem ad veritatem accedere posuerunt WOLFIVS, THVMMIGIVS, aliique plurimi, cum semidiametrum adparentem ceu contemnendam ob parvitatem statuere licet. Prope enim perspexerunt, si semidiameter ista adparens notabilem haberet magnitudinem, notabilem quoque fore differentiam inter distantiam singularum superficiei AD partium, ut & inter angulos incidentiae radiorum e partibus istis emanantium De tertia enim differentia, quae est inter angulos emanationis, si cel. EVLERVM excipias, ne verbum quidem invenies. Hasce vero differentias, cum suspicerent eas propositionis concinnitatem fore turbaturas, in calculum non induxerunt. At iam vidimus, habita earum ratione concinnam hanc positionem saluam esse, simul ac corpus lucidum sumatur esse sphaericum, quale certe est Sol, cuius vim illuminantem in *Meletematibus varii argumenti* calculo prosequutus est Cel. THVMMIGIVS. Quare hoc respectu, omni rigore vera erunt, quae de illuminatione planetatarum ut proxime tantum vera demonstrauit.

§. 118. Excipiendum hic esse diximus Cel. & ingeniosissimum EVLERVM. Etenim in scripto supra iam passim laudato (§. 71. 72.) differentiarum istarum rationem habuit. Ut mirer, cum theorema, quod nobis hic quintum est (§. 109.) de corporibus sphaericis demonstrasset, sextum hoc nostrum (.116.) prono certe alueo ex illo fluens, eius sese subduxisse ingenii acumini. At forsan ad maiora properans hisce minus immorandum esse censuit. Ceterum iam monuimus, paucis saltem casibus calculum Eulerianum cum nostro coincidere (§. 110.)

§. 119. Ex dictis porro liquescit, cur distantia a centro semidiametro minor assumi nequeat. Etenim propius admoto plano E, ita augetur illuminatio, ut cum pervenit in A, ibi iam eius illuminatio euadat maxima siue absoluta, quae debetur magnitudini adparenti maximae. Sinus enim quilibet alius sinu toto maior esse nequit.

§. 120. Hactenus exposuimus, qualis in eo casu obtineat illuminatio qui simplicissimus est, siue quo limbus corporis luminosi adparens est circularis, atque plano illuminando normaliter imminet, quoque adeo conus luminosus radiorum coincidentium ipsi verticaliter insistit. Possemus iam, his absolutis, ad ceteros progredi casus. At cum isti ita sint compositi, ut calculo prosequendi sint operosiori, non inutile erit, si videamus, quomodo faciliori huic casui calculus adaptetur. Quo facto medium parabitur conos luminosos u-

trius-

triusque generis (§.103. 104.) inter se comparandi.

§. 121. Ad undecimam itaque figuram reuertamur, sintque omnia ut in (§. 107.) Fiat radius $AC = 1$, angulus $MCD = v$, $Mm = dv$, $MP = \text{cos}.\ v.$ $MQ = \text{sin}\ v.$ = semidiametro zonulae MSsm. Ratio diametri ad peripheriam & hic & in toto hoc opere dicetur $= 1 : \pi$, ita ut posita diametro $= 1$, sit peripheria $= \pi = 3,15926......$ His ita positis erit area zonulae $MSsm = 2\pi\ \text{sin}\ v.\ dv.$ cui proportionalem statuimus quantitatem radiorum ex ea quaquauersum emanantium. At vero cum ista sit ut sinus anguli incidentiae, si in datum planum incidant, erit illuminatio in C a radiis zonulae MSsm proveniens, $= 2\pi.\ \text{sin}\ v.\ \text{cos}\ v.\ dv = 2\pi\ \text{sin}\ v.\ d\ (\text{sin}\ v.)$ Quare integrando erit illuminatio toti segmento MDS debita $= \pi\ (\text{sin}\ v)^2$. Ut adeo hinc absque ullis ambagibus pateat theorema V. (§. 109. quippe angulus v est obiecti semidiameter adparens. Fig. 11.

§. 122. Hoc vero modo obtinuimus illuminationis in C intensitatem, quae erit $= \pi\ \text{sin}\ v^2$. Quodsi quaeratur illuminationis quantitas, sumendum erit factum quantitatis $\pi\ \text{sin}\ v^2$ in aream spatioli illuminati C. Denotat enim $\pi\ \text{sin}\ v^2$ veluti numerum radiorum, qui incidunt in spatium, quod est $= 1$, adeoque eorum densitatem (§. 44), a qua pendet plani illuminati claritas.

§. 123. Quodsi fuerit $v = 90°$, erit $\text{sin}\ v = 1$, adeoque illuminatio absoluta $= \pi$. Etsi vero

vero eam ſupra per unitatem expreſſimus (§. 111.) hic tamen eius valor π adhibendus erit, ubi conos radiorum diuergentium & coincidentium invicem comparare volueris. Quod iam, caſum hactenus euolutum invertendo, ſequentem in modum adgrediemur. (§. 106.)

§. 124. Sit C particula ſuperficiei luminoſae infinite parua, cuius ſemidiametrum adparentem in D viſam efferemus per z, qua itidem quantitate, cum ſit infinite parua, exprimere hic licet eius ſinum. Sit porro in D ſphaerae circum C deſcriptae ſegmentum infinite paruum, cuius ſemidiameter & ſinus vocetur ζ. atque patet aream circelli C fore $= \pi z z$, ſegmenti D vero $= \pi \zeta \zeta$. denique illuminationis in D quae particulae C debetur intenſitatem fore $= \pi z^2$, eiusdem vero quantitatem $= \pi^2 z^2 \zeta^2$. At iam *quaeritur quantitas radiorum, quos particula* C *per totum hemiſphaerium vel per datum quemlibet conum luminoſum* M C S *diffundit.*

§. 125. Quantitas radiorum emanantium pendet 1°. a ſplendore particulae C, quippe qui conſtituit eius claritatem veram ſiue intenſitatem luminis (§. 36. 39.). 2°. ab eius area, quippe quae radiorum in idem ſpatium coincidentium auget vel minuit quantitatem (§. 38. 52.) 3° denique ab angulo emanationis, cum minuatur illuminatio & radiorum oblique emanantium quantitas, ut huius anguli ſinus. (§. 81.) ſplendorem hic ponemus $= 1$, cum calculum, quem ſumus inſtituturi, non ingrediatur. Aream circelli C diximus $=$

$z z \pi$

$zz\pi$ & dicto angulo MCD $= v$, erit sinus emanationis $=$ cos. v. adeoque quantitas radiorum sub angulo MCA in zonulam MSsm incidentium erit $= 2\pi^2 zz$. cos. v. sin vdv, id est ut factum ex area circelli C, zonulae MSsm & sinu emanationis. Quare integrando habebitur quantitas radiorum per conum luminosum MCS diuergentium $= \pi^2 z^2$ sin v^2. *Crescet igitur ut factum ex areola circelli in basin Coni luminosi, cujus diameter est* MS. Est enim πz^2 area circelli C, & π sin v^2. area baseos coni MCS, cujus latus MC est $= 1$. Elegans ergo & hinc fluit

THEOREMA VII.

§. 126. *Sit* MCcS *conus, cuius axis* CE *basi* MS *normaliter insistit, atque ita truncatus, ut segmentum* Cc *sit infinite paruum & ad axin normale; Posito iam latere* CM $= 1$, *dico si segmentum* Cc *lucidum radios per conum in basin diffundat, eorum quantitatem fore factum ex areola segmenti* Cc *in aream baseos* MS *ducta.* Fig. 13.

§. 127. Huic theorematі, quod radios spectat diuergentes prorsus analogum est sequens

THEOREMA VIII.

§. 128. *Si basis coni* MS *concipiatur esse luminosa, quantitas radiorum in segmentum* Cc *infinite paruum coincidentium erit factum ex area segmenti* Cc *in aream baseos luminosae* MS. *adeoque posito in utroque casu eodem splendore, quantitas ista erit aequalis.*

§. 129.

§. 129. Demonstratione hoc theorema non indiget, cum ex §. 121. palam sit atque euidens. Vidimus enim supra (§. 91.) basi MS substitui posse segmentum sphaerae, cuius radius est CM, subtensa vero MS. Ceterum ex comparatione utriusque theorematis hic in medium prolati manifestum fit, quae de comparatione radiorum coincidentium & divergentium in superioribus adnotauimus. (§. 106.) Etenim posito in utroque casu eodem superficierum illuminantium splendore, eadem erit radiorum in superficiem oppositam incidentium quantitas. Contra ea diversissima aderit illuminatae superficiei claritas. Haec enim erit reciproce ut area illuminata. Erit ergo in Cc finita, in MS vero infinite parua. At de his infra plura. Determinanda iam venit ea illuminatio, quae producitur, cum conus luminosus plano illuminando obliquius insistit. Quod v. gr. locum habet, quando sol vel luna plena non fuerit verticalis.

Fig. 14. §. 130. Sit ACBD circulus sphaerae verticalis, AEFB horizon, IM circulus in superficie sphaerae minor, conum luminosum terminans, per quem obiectum in plano horizontis atque in centro sphaerae K situm, est illuminandum. Centrum vel polus huius circuli sit G; CGED verticalis per polum hunc transiens. M punctum quodvis in isto circulo, & CMFD verticalis per istud demissus. Circulo MI ductus concipiatur infinite vicinus, eodem polo P gaudens, qui sit Nn. E polo G ducantur circuli maximi vel eorum arcus GM, Gm sibi infinite vicini, atque ex M in CG de-

demittatur arcus normalis MH, quaerenda iam est illuminatio particulae Mm Nn debita. Quem in finem fiat

distantia centri a vertice, $GC = a$,
distantia circuli M a polo, $MG = x$.
distantia puncti M a vertice, $MC. = z$.
augulus CGM - - $= y$.

atque erit

$$\cos. HM = \cos. x : \cos. HG.$$
$$\cos. z = \cos. HC. \cos. HM.$$

Unde

$$\cos. z = \frac{\cos. x. \cos. HC.}{\cos. HG}$$

Sed

$$HC = a - HG \;\&\; \cos. HC \, (= \cos. a. \cos HG.) + \sin a. \sin HG$$

quare

$$\cos. z = \cos. x \, (\cos. a + \sin a. \operatorname{tang} HG)$$

Est vero

$$\operatorname{tang} HG = \operatorname{tang} x. \cos. y.$$

unde

$$\cos. z = \cos. x. \cos. a + (\sin a. \sin. x. \cos. y) = \sin MF$$

qui est sinus anguli incidentiae.
Porro est spatiolum

$$Mm\,Nn = dy\, dx \sin x.$$

Adeoque huius particulae vis illuminans, cum sit ut sinus anguli incidentiae, erit

$$dd\eta = dy \cos. a \sin x. \cos. x. dx. + \sin a \cos. y. dy. \sin x^2. dx.$$

Duplicem iam haec formula requirit integrationem, in quarum prima statuenda x & dx. const. ut habeatur illuminatio debita annulli sphae-

ſphaerici ſegmento infinite paruo MI. Unde erit

$$d\eta = y \cos a \sin x . \cos x . dx$$
$$+ \sin a . \sin y . \sin x^2 dx$$

At iam ut habeatur illuminatio debita ſectori IGM, ponatur y conſt. atque erit, debita adiecta conſtante,

$$\eta = \tfrac{1}{2} \cos a \sin x^2 y$$
$$+ \tfrac{1}{2} \sin a . \sin y \left(x - \tfrac{1}{2} \sin 2x \right)$$

Quae eſt illuminatio pro ſectore IGM. En iam caſus quoſdam ſpeciales.

§. 131. Si centrum circuli fuerit in vertice, puncta G & C coincidunt, eritque $a = \sin a = 0$, $\cos a = 1$. adeoque illuminatio

$$\eta = \tfrac{1}{2} \sin x^2 . y$$

Erit ergo ut factum ex quadrato ſinus ſemidiametri adparentis in dimidium angulum IGM. adeoque ſi pro ſectore totus ſumatur circulus, erit $\tfrac{1}{2} y = \pi$, unde illuminatio $= \pi . \sin x^2$. Quem caſum ceu faciliorem ſupra iam perluſtrauimus. (§. 121.)

§. 132. Si centrum circuli fuerit in horizonte, coincident puncta G & E, eritque $a = \tfrac{1}{2}\pi = 90^\circ$, $\cos a = 0$, $\sin a = 1$, unde

$$\eta = \tfrac{1}{2} \sin y \left(x = \tfrac{1}{2} \sin 2x \right)$$

In hoc caſu angulus y rectum excedere nequit, faciendo igitur $y = 90^\circ$. erit $\eta = \tfrac{1}{2}(x - \tfrac{1}{2} \sin 2x)$, quae eſt illuminatio quadranti circuli iſtius debita, qui ex alterutra parte verticalis CE ſupra horizontem verſatur. Ut & alter addatur quadrans, duplicanda eſt iſta formula, eritque

$$\eta = x - \tfrac{1}{2} \sin 2x.$$

Erit

Erit ergo hoc casu, quo centrum circuli in horizonte versatur illuminatio a semicirculo visibili proficiscens aequalis differentiae inter semidiametrum adparentem & dimidiam partem sinus diametri adparentis.

§. 133. Si centrum G sit in vertice, atque arcus GM abeat in quadrantem, totus quoque circulus abibit in hemisphaerium horizonti insistens. Hoc vero casu obtinet illuminatio absoluta eritque $a =$ sin $a = 0$, cos. $a = 1$, $x = 90° = \frac{1}{2}\pi$, sin $x = 1$, cos. $x = 0$, $y = 180° = \pi$, sin $y = - 1$. unde illuminatio dimidio hemisphaerio debita erit

$$\eta = \frac{1}{2}\pi$$

& pro toto circulo

$$\eta = \pi.$$

Quae ergo est illuminatio absoluta, ad quam ceterae omnes sunt referendae, si comparatio instituatur. Iam vero monuimus eam in his calculis non exprimi per unitatem, sed per valorem ipsius π (§. 123. 121).

§. 134. Sit altitudo centri EG qualiscunque, fiatque $y = 180° = \pi$, erit sin $y = 0$, adeoque pro semicirculo ex alterutra parte verticalis CGE erit

$$\eta = \frac{1}{2}\pi. \text{ cos. } a \text{ sin } x^2.$$

& illuminatio toti circulo debita

$$\eta = \pi. \text{ cos. } a. \text{ sin } x^2.$$

Est vero cos. a ipse sinus altitudinis centri G, & sin x^2. est quadratum sinus semidiametri adparentis, denique π sin x^2 est area baseos cylindri luminosi siue *disci adparentis.* Hinc iterum ad elegantissimum hoc conducimur

E THEO-

THEOREMA IX.

§. 135. *Sit corpus luminosum circulare vel sphaericum supra datum planum utcunque suspensum, illuminatio plani istius, cui obuertitur, erit factum ex sinu altitudinis centri & area disci adparentis.*

§. 136. Huic affine est sequens

THEOREMA X.

§. 137. *Illuminatio absoluta est ad illuminationem corporis circularis vel sphaerici utcunque super planum quoddam suspensi, ut unitas ad factum ex sinu altitudinis centri in quadratum sinus semidiametri adparentis ducto.*

Est enim illuminatio absoluta $= \pi$ (§. 133.) quare ratio $\pi : \pi.$ cos. $a.$ sin $x^2 = 1 :$ cos. $a.$ sin x^2 est ea ipsa ratio, quam effert theorema.

§. 138. Hinc prono iterum alueo fluit

THEOREMA XI.

§. 139. *Si idem corpus circulare siue sphaericum plano cuidam dato & in eadem distantia centri normaliter & oblique immineat, erit illuminatio normalis ad illuminationem obliquam, ut sinus totus ad sinum altitudinis centri in casu posteriori.* Etenim ob distantiam in utroque casu eandem, eadem quoque erit semidiameter adparens Unde differentia illuminationis tantum ab altitudine pendet. Est vero in casu priori sinus altitudinis $= 1$. Unde constat propositum.

§. 140. Inexspectatum quid habent haec theoremata, quod maxime ea reddit concinna. Dubitari enim omnino licebat, an obliquitas radiorum e singulis corporis circularis

vel

vel sphaerici punctis emanantium & incidentium ita velut in summam contrahi, atque ex cunctis hoc sumi posset medium, quod *altitudini centri* respondet. Sumta equidem est ista altitudo ab HALLEIO, cum in vim radiorum solarium calefacientem inquireret. At ni fallor tamquam proxime vera. Exacte autem eam veram esse, quae pro ceteris omnibus est assumenda, nondum vidi demonstratum esse. Simile quoddam dubium, quod corpora luminosa sphaerica spectat, supra iam solvimus. (§. 117.)

§. 141. Ex formulis erutis singuli iam casus illuminationis, quae per conum fit facile calculo subduci possunt. Quare progredi licet ad secundum casum generalem (§. 112.) quo nempe limbus corporis luminosi adparens rectis lineis terminatur, siue quo segmentum sphaerae uno vel pluribus constat triangulis sphaericis, circulis maximis terminatis. Ut vero & hic a simplicioribus ordiamur, ponemus, unicum esse triangulum, idemque rectum, cuius crus alterum & hypothenusa in vertice coincidant. Maioris quoque perspicuitatis ergo assumemus planum illuminandum esse horizontate.

§. 142. Sit ergo ACBD circulus verticalis, in A & B horizontem AEB bisecans, qui iterum in E bisectus sit in duos quadrantes AE, EB. Ducto iam circulo quolibet EMQ ipsique infinite vicino E m q, demissoque verticali CMPD, quaeritur illuminatio plani in centro sphaerae positi, quae debeatur triangulo rectangulo MCQ. Fig. 15.

§. 143. E polo P ducantur arculi paralleli Mm, Nn, sibique infinite vicini, sitque illuminatio areolae MmnN debita $= dd\eta$. Porro fiat

$$CQ = y,\ PB = \omega$$
$$MQ = x$$

atque erit

$$\text{areola } MmnN = dy.\ dx.\ \text{cos}.\ x.$$
$$\text{sinus altitudinis } PM = \text{cos}.\ x.\ \text{cos}.\ y.$$

Quare cum illuminatio sit in ratione composita siue ut factum utriusque huius quantitatis, erit

$$dd\eta = dy.\ \text{cos}.\ y.\ dx.\ \text{cos}.\ x^2$$

Quae formula ut integretur, primo ponenda erit y & dy const.
unde

$$d\eta = \tfrac{1}{2}\ dy.\ \text{cos}.\ y\ (x + \text{sin}\ x.\ \text{cos}.\ x)$$

Quae ergo est illuminatio debita parti MQqm.

§. 144. At si iam ponatur y siue CQ variabilis, una quoque variabitur $x = MQ$, hac lege ut sit

$$\text{sin}\ y = \text{cot}.\ \omega.\ \text{tang}.\ x.$$

Ponitur vero ω const. adeoque erit

$$d\ \text{sin}\ y = dy\ \text{cos}.\ y = \text{cot}\ \omega.\ d\ \text{tang}.\ x.$$

Quo valore substituto habebitur

$$d\eta = \tfrac{1}{2}\ \text{cot}.\ \omega\ (x d\ \text{tang}\ x$$
$$+ \text{sin}\ x.\ \text{cos}.\ x.\ d.\ \text{tang}\ x)$$

Est vero

$$d\ \text{tang}.\ x = dx : \text{cos}.\ x^2$$

quare stubstituendo hunc valorem in termino secundo

$$d\eta = \tfrac{1}{2}\ \text{cot}.\ \omega\ (x d\ \text{tang}\ x + \text{tang}\ x.dx)$$

adeoque absoluta integratione

$$\eta = \tfrac{1}{2}\ \text{cot}\ \omega.\ x.\ \text{tang}.\ x.$$

At cum ſit

$$\cot \omega \tan x = \sin y$$

erit

$$\eta = \tfrac{1}{2}\, x \sin y.$$

Sic tandem peruenimus ad formulam valde concinnam, quam ſequens effert

THEOREMA XII.

§. 145. *Illuminatio, quae provenit a triangulo verticali* C M Q *eſt demidia pars facti ex ſinu cruris verticalis* C Q *in arcum cruris alterius* M Q.

§. 146. Manente crure C Q variari poteſt crus alterum M Q. *Quo caſu in formula eruta conſtans erit* y, *variabitur* x, *atque illuminatio creſcet in ratione ſimplici directa arcus* $QM = x$.

§. 147. Quodſi ergo fuerit $GM = MQ$, illuminatio a triangulis Q C M, M C G enaſcens erit aequalis.

§. 148. Caſus hic longe eſt frequentiſſimus, quippe circulus E Q eſt limbus adparens ſuperior tectorum aedium & murorum, quibus plerumque cinguntur horti, quorumque ſummitas vel faſtigium eſt horizontale.

§. 149. Ex dictis porro ſequitur fore illuminationem debitam triangulo

$$CMQ = \tfrac{1}{2}\, MQ.\ \text{coſ.}\ MEP.$$
$$\Delta\, GCM = \tfrac{1}{2}\, GM.\ \text{coſ.}\ MEP.$$
$$\Delta\, PCB = \tfrac{1}{2}\, PB.$$
$$\Delta\, FCP = \tfrac{1}{2}\, FP.$$

adeoque &

$$\Delta\, EGF = \tfrac{1}{2}\, EF - \tfrac{1}{2}\, EG.\ \text{coſ.}\ GEF.]$$
$$\Delta\, EQB = \tfrac{1}{4}\, \pi\, (1 - \text{coſ.}\ GEF)$$

quadrilatero $FGMP = \tfrac{1}{2} FP - \tfrac{1}{2}\, GM.\text{coſ.}GEF.$

§. 150. Hinc porro facile elicietur illuminatio proueniens a triangulo qualicunque.
Fig. 16. Uniuersalis enim erit methodus sequens. Sit ACBD circulus verticalis, AEB horizon, atque quaerenda sit illuminatio, quae debetur triangulo QNF, dum planum illuminandum est in centro sphaerae & horizontale. E vertice C per angulos N, Q, F demittantur verticales CND, CQD, CFD. Quo facto tria existent triangula verticalia NCQ, QCF, FCN. Quaesita ergo illuminatione tribus his triangulis debita, quod fiet ope formulae ante datae, nil amplius factu opus erit, quam ut illuminatio Δ FCN subtrahatur a summa illuminationis Δ NCQ, QCF. atque remanebit illuminatio quaesita.

§. 151. Erit ergo illuminatio debita,

triangulo $NCQ = \frac{1}{2}$ NQ. cosin. NSE.

Δ $QCF = \frac{1}{2}$ QF. cosin. FIB.

Δ $FCN = \frac{1}{2}$ FN. cosin. FHE.

adeoque illuminatio quaesita erit

$$n = \tfrac{1}{2}\,NQ.\,\text{cos}.\,NSE + \tfrac{1}{2}\,QF.\,\text{cos}.\,FIB - \tfrac{1}{2}\,FN.\,\text{cos}.\,FHE.$$

§. 152. Inuenta iam illuminatione pro triangulo quocunque, ea simul dabitur pro triangulatis, quorum latera itidem sunt circuli maximi, vel eorum arcus. Haec enim cum in triangula resolvi possint, quaeri poterit illuminatio pro quouis triangulo, atque summa singularum illuminationum erit ea quae quaerebatur. Facile vero patet, hic adhiberi posse
Fig 17. compendium sequens. Sit ACBD circulus verticalis, AB horizon, & EFGHI pentagonum. E vertice C demittantur verticales,

CE,

CE, CF, CG, CH, CI, atque per formulam §. 144. quaeratur illuminatio proveniens a triangulis verticalibus ECF, FCG, GCH, HCI, ICE, atque patet ex inspectione figurae, a summa trium priorum subtrahendam esse summam duorum posteriorum, ut habeatur illuminatio pentagono isti debita.

§. 153. Cum itaque illuminatio cuicunque sphaerae segmento circulis maximis terminato respondens reducatur ad illuminationem triangulis debitam, quorum duo crura in vertice C alterum angulum claudunt, ad haec reuertemur, ipsorum symptomata aliquando curatius perscrutaturi. Sint ergo omnia ut in §. 142. seqq. vidimus esse $\eta = \frac{1}{2}x$. sin y Fig. 15. $= \frac{1}{2}$ MQ. sin CQ. hancque illuminationem deberi triangulo CQM, cuius crura CQ, MQ in Q rectum claudunt angulum. Vidimus porro, manente crure CQ, illuminationem sequi arcum vel crus QM, adeoque sumto in circulo EQ arcu quolibet GM, demissisque verticalibus CM, CG, illuminationem triangulo GCM debitam fore $= \frac{1}{2}$ GM. sin CQ.

§. 154. Patet ergo hinc illuminationem istam a duabus tantum trianguli verticalis cuiusuis GCM partibus pendere, quarum altera est crus GM vertici C oppositum, altera vero est arcus CQ vel, quod eodem recidit, complementum anguli QEB, quem mutuato ex astronomicis termino *angulum elevationis* circuli EQ supra horizontem EB vocare liceat. Quodsi circulum istum EQ aequatorem esse fingas, haud incongrue dixeris, *illuminationem triangulo cuilibet* GCM *respondentem esse partem dimi-*

diam facti ex cosinu eleuationis aequatoris in ipsius partem abscissam vel arcum GM.

§. 155. Non ergo pendet illuminatio in hoc casu a magnitudine vel area trianguli, quippe quae aequatur differentiae inter summam trium angulorum trianguli sphaerici & plani. Unde areae trianguli illuminatio ipsi respondens proportionalis esse nequit. Retento eodem segmento GM, eo minor fiet area Δ GCM. quo propius erit culmini Q, siue quo minor erit arcus MQ.

§. 156. Si pro GM substituatur quadrans $EQ = \frac{1}{2}\pi$, erit illuminatio a triangulo ECQ pendens $\eta = \frac{1}{4}\pi . \cos . QEB = \frac{1}{4}\pi \sin CQ$. ut adeo hoc casu, crescente culminis Q depressione, illuminatio crescat ut sinus arcus CQ. Quodsi hoc incrementum fuerit infinite parvum $= Qq = dy$, erit $d\eta = \frac{1}{4}\pi \cos . y . dy . = \frac{1}{4}\pi . Qq . \sin BQ$. Etsi ergo augmentum claritatis cuiuis sectoris infinite parui QEq particulae MmnN debitum crescat ut sinus altitudinis MP, quippe qui sinui anguli incidentiae est aequalis, nihilominus incrementum toti sectori debitum crescet ut sinus altitudinis culminis quod utique videtur singulare. Primo enim intuitu suspicari quis potuisset, incrementum istud potius fore in ratione sinus cuiusdam intermedii, v g. arcui PM respondentis. Quare non inutile erit in caussam huius paradoxi inquirere.

§. 157. Sit ut supra (§. 143.) areola $MmnN = dy . dx \cos . x$. porro fiat arcus altitudinis $PM = z$, erit illuminatio

$$dd\eta = dy . dx . \cos . x . \sin z .$$

In

In hac formula dy est constans, adeoque erit

$$d\eta = dy\int dx. \text{ cos. } x. \text{ sin } z.$$

siue

$$d\eta = dy. \int \text{sin } z. d \text{ sin } x.$$

At vero cum sit

$$1 : \text{sin EM} = \text{sin MEP} : \text{sin MP}$$

erit

$$1 : \text{cos. } x = \text{cos. } y : \text{sin } z$$

unde

$$\text{sin } z = \text{cos. } y. \text{ cos. } x.$$

At vero arcus y hic est const. quare substituendo erit

$$d\eta = \text{cos. } dy\int \text{cos. } x. d \text{ sin } x.$$

Qualecunque ergo sit integrale, patet istud ab arcu y non pendere, ut adeo illuminatio parti cuilibet MEm debita sit in ratione sinus altitudinis culminis. Ratio ergo cur praeter expectationem res cadat, in hoc sita est, quod sin z simpliciter sit in ratione cosin x, quamdiu arcus y est constans. Quo fit ut dy & cos. y integrale non ingrediantur.

§. 158. Quodsi tamen eiusmodi sinum intermedium quaerere volupe fuerit, rem sic adgredi datur. Primo absoluenda est integratio, eritque ut supra

$$d\eta = \tfrac{1}{2} \text{ cos. } y. dy \; (x + \text{sin } x. \text{ cos. } x.)$$

Porro quaerenda area partis MQqm, quae erit

$$dx\int \text{cos. } x. dx = dy. \text{ sin } x.$$

Haec iam per sinum istum intermedium, qui sit = sin ζ erit multiplicanda, atque productum debet esse = $d\eta$. Erit ergo

$$d\eta = dy. \text{ sin } x. \text{ sin } \zeta = \tfrac{1}{2} \text{ cos. } y. dy. \; (x + \text{sin } x. \text{ cos. } x.)$$

adeoque

$$\sin \zeta = \frac{\cos y\,(x + \sin x.\cos x)}{2 \sin x}$$

Unde patet 1°. ſinum ζ pendere ab arcu QM, huiusque ſinu & coſinu. 2°. Manente arcu QM $= x$, ſinum iſtum arcus quaeſiti ζ fore in ratione ſinus altitudinis culminis Q, atque 3°. ad hunc ſe habere ut $(x + \sin x.\cos x)$ ad $\sin x$.

§. 159. Eſt igitur

$$\sin \zeta = \frac{\cos y.x}{2 \sin x} + \tfrac{1}{2} \cos y \cos x$$

ſed

$$\cos y.\cos x = \sin MP = \sin z.$$

quare

$$\sin \zeta = \frac{\cos y.x}{2 \sin x} + \frac{\sin z.}{2}$$

Parum igitur abeſt, quin $\sin \zeta$ ſit medius inter extremos $\sin$ M P & $\sin$ Q B. Etenim pro arcubus M Q minoribus, proxime erit $x = \sin x$. adeoque & proxime

$$\sin \zeta = \frac{\cos y + \sin z.}{2}$$

§. 160. Ut ſatis complexus eſt valor iſte pro $\sin \zeta$ repertus, ubi ſectorem Q E P ponimus infinite paruum, ita prolixior adhuc euadit abſoluta altera integratione. Sic pro triangulo G C M erit

$$\sin \zeta = \frac{\tfrac{1}{2} x \sin y}{CGM + CMG + MCQ - \pi}$$

angulis hiſce in iis partibus ſumtis, quarum unitas eſt ſphaerae radius. Eſt enim fractionis huius diuiſor ipſa trianguli G C M area.

§. 161.

§. 161. In examinando tertio casu generali (§. 102.) breuiores erimus, quippe infinitos alios eosque diuersissimos complectitur, qui minus sunt obuii, difficiliusque prosequuntur calculo. Specialiores tamen casus infra occurrent, ubi de illuminatione systematis planetarii agetur. Methodum ergo, qua in hisce casibus uti licebit, si ad segmenta sphaerica reducantur, vel indicasse tantum sufficiet.

§. 162. Qualiscunque ergo fuerit figura limbi corporis luminosi, assumatur in eo punctum quoddam ceu centrum, ad quod ceterae superficiei adparentis partes referantur, vel commode referri possint. Sumatur huius centri supra planum illuminandum eleuatio, quae sit G E, denotante nimirum A C B D circulum Fig. 18. verticalem, A E B horizontem plani illuminandi atque in centro sphaerae positi. E centro G ducantur arcus, quales sunt G M, G m, infinite vicini, atque ex conditionibus illuminationis & situs obiecti luminosi quaeratur relatio inter angulum I G M & arcum G M, per aequationem exprimenda. Quo facto, ponatur ut supra (§. 130.)

$$CG = a \qquad CM = z$$
$$GM = x \qquad CGM = y$$

atque ope istius aequationis dabitur x per y & viciffim. Porro erit sinus anguli incidentiae pro spatiolo M m

$$\sin MF = \cos z = \cos x . \cos a + \sin a . \sin x . \cos y .$$

& areola spatioli M m $= dy\, dx . \sin x$.

quare illuminatio ipsi debita

$$ddn = dy . \cos a . \sin x . \cos x . dx + \sin a . \cos y . dy . \sin x^2 dx,$$

Posita

Poſita iam y & dy conſt. ut habeatur illuminatio ſpatio M G m reſpondens, integratio inſtituatur, eritque

$$d\eta = \tfrac{1}{2} dy. \operatorname{coſ} a. \operatorname{ſin} x^2 + \tfrac{1}{2} \operatorname{ſin} a \operatorname{coſ} y. \\ (x - \operatorname{ſin} x. \operatorname{coſ} x). dy$$

Ut vero & altera abſoluatur integratio, in hac formula x exprimatur per y, ſiue y per x, quod fiet ope aequationis inter arcum G M & angulum I G M repertae, & integrando dabitur η per x vel per y, quaeque erit illuminatio ſpatio I G M debita.

§. 163. Ita v. gr. ſi ſegmentum I M L fuerit circulare, erit G eius centrum, atque x erit conſtans. Ut adeo integrando iterum habeatur formula (§. 130.)

$$\eta = \tfrac{1}{2} \operatorname{coſ} a. \operatorname{ſin} x^2 y + \tfrac{1}{2} \operatorname{ſin} a. \operatorname{ſin} y \, (x - \tfrac{1}{2} \operatorname{ſin} 2x)$$

§. 164. Si fuerit $y = x$, erit

$$d\eta - \tfrac{1}{2} dx \operatorname{coſ} a \operatorname{ſin} x^2 + \tfrac{1}{2} \operatorname{ſin} a \operatorname{coſ} x (x - \operatorname{ſin} x. \operatorname{coſ} x) dx$$

cuius integrale addita debita conſtante erit

$$\eta = \tfrac{1}{4} x. \operatorname{coſ} a - \tfrac{1}{4} \operatorname{coſ} a. ſx. \operatorname{coſ} x + \tfrac{1}{2} \operatorname{ſin} a \\ (x \operatorname{ſin} x + \operatorname{coſ} x - \tfrac{1}{3} \operatorname{coſ} x^3 - \tfrac{2}{3})$$

§. 165. Poterit quoque loco aequationis inter I G M & G M aſſumi alia, quae ſit inter E F & altitudines F P, F M. At cum ſinguli iſti caſus praeter prolixitatem calculi, nil habeant, quod concinnum eſſet & elegans, eos hic fuſius perluſtrare operae pretium non eſt, praeſertim cum infra alia occurrant exempla huc ſpectantia, abſtractis his iucundiora.

§. 166. Quae hactenus de illuminatione directa diſſeruimus, ea nituntur hypotheſi, *ſuperficiem corporis illuminantis, qua late patet, aeque eſſe luminoſam*, hacque praemiſſa, caſus, qui dari poſſunt omnes, enumerauimus, atque hos, qui

qui frequentiores sunt, calculo fusius perlustrauimus. Quodsi vero superficies illuminans in singulis suis partibus diuersa gaudere statuatur claritate, determinanda primum erit lex, qua in longitudinem & latitudinem claritas ista decrescit. Qua data illuminatio pro qualibet particula v. gr. M m n N supra reperta per eam multiplicanda est claritatem, quae ipsi propria est. Post instituta integratione habebitur illuminatio toti superficiei vel datae huius parti debita. At vero cum innumeri hic dentur casus eique diuersissimi, superfluum foret, exemplis rem heic illustrare, quibus in sequentibus longe aptior erit locus. Lectorem itaque ad ea Capita remittimus, quibus de illuminatione systematis planetarii & de umbra agetur. Fig. 15.

§. 167. Antequam tamen, hisce absolutis, ad finem perducamus illuminationis directae pertractationem, supersunt, quibus paullo adhuc immorari conducit. Particulam superficiei illuminandae statuimus infinite paruam, eamque ceu unitatem spectauimus (§. 122.) ut inde ea erueretur claritas, quae huic particulae vel puncto est propria, quaeque adeo pro variis punctis est diuersa. Accidit vero subinde, ut radiorum in totam superficiem incidentium, eorumque quantitatis habenda sit ratio, independenter a claritate, quam in singulis superficiei illuminandae punctis producunt. Haec enim quantitas, si per magnitudinem superficiei adparentem diuidatur, eius constituit *claritatem* veluti *mediam*. Longe vero hoc casu prolixior est calculus, quippe pro

quo-

quouis ſuperficiei illuminandae puncto, mutantur anguli incidentiae & emanationis, luminis diſtantia, eiusque magnitudo adparens, pluribuſque caſibus figura limbi adparens. Quare ſi uno alteroue eum illuſtremus exemplo, neque inutile quid neque iam actum agemus.

§. 168. A ſimpliciſſimo vero ut ordiamur, ſit A B M D circulus, cuius centro C normaliter immineat globus G, per totam ſuperficiem aeque luminoſus. Quaerenda iam ſit quantitas radiorum in circulum A B M D incidentium huiuſque circuli claritas media. Quod ut fiat pluribus uti licebit compendiis, quae calculum mirum in modum reddunt concinnum.

Fig. 19.

I°. Illuminationem abſolutam dicemus $= \pi$ (§. 133.) quae in puncto C obtineret, ſi globi ſuperficies ipſi eſſet infinite vicina (§. 100.)

II°. Semidiametrum globi ſtatuere licet $= 1$. quippe cum ea eſt centrorum G, C ab invicem diſtantia, illuminatio euadit abſoluta.

III°. A magnitudine globi adparente animum abſtrahere licet, cum demonſtratum dedimus, illuminationem aſſumi poſſe in ratione diſtantiae centri reciproca duplicata (§. 115.)

IV°. Cum diſtantia iſta a quovis annuli A B M D ſpatiolo M m n N ſit eadem, uno velut actu habebitur radiorum in totum annulum incidentium quantitas.

§. 169.

§. 169. Sit igitur
distantia centrorum C G $= a$
annuli semidiameter C N $= x$
eiusdem latitudo N M $= dx$
erit
distantia G N $= \sqrt{(a^2 + x^2)}$
sinus anguli incidentiae G M C $=$
$a : \sqrt{(a^2 + x^2)}$
annuli area $= 2 \pi x dx$.
Vocata ergo radiorum in annulum A B M D incidentium intensitate $= \eta$, quantitate $= dq$. erit

$$\eta = \pi \frac{a}{\sqrt{(a^2 + x^2)}} \cdot \frac{1}{(a^2 + x^2)}$$

crescit enim illuminatio in ratione composita simplici illuminationis absolutae, sinus anguli incidentiae, subduplicata vero distantiae centri G. Erit ergo formulam istam reducendo

$$\eta = a \pi : (a^2 + x^2)^{3:2}$$

Quare hoc casu illuminatio dati cujusuis spatioli M m n N *est reciproce ut cubus distantiae.* Ut porro definiatur quantitas dq, illuminatio η per aream annuli est multiplicanda, eritque

$$dq = \eta . 2 \pi x dx$$

siue substitutione facta

$$dq = \frac{2 a \pi^2 x dx}{(a^2 + x^2)^{3:2}}$$

Cuius integrale, addita debita constante, est

$$q = 2 \pi [1 - a : \sqrt{(a^2 + x^2)}]$$

Est vero $a : \sqrt{(a^2 + x^2)} =$ G C : G N $=$ sin. anguli incidentiae quare $1 - a : \sqrt{(a^2 + x^2)}$ est sinus versus anguli N G C, qui illius est complementum. *Ut adeo quantitas radiorum in circulum*

lum A B M D *incidentium ſit in ratione ſinus verſi anguli* N C G, *ſiue ſemidiametri circuli illuminati in centro ſphaerae illuminantis ſpectati adparentis.*

§. 170. Porro rotando triangulum N G C circa axin G C, recta N F G in ſuperficie ſphaerae G abſcindit ſegmentum, cuius area erit $= \pi [1 - a : \sqrt{(a^2 + x^2)}]$. *Unde & haec area radiorum in circulum* A M *incidentium denotat quantitatem, quippe ipſi eſt proportionalis.*

§. 171. Quodſi vero tandem huius areae duplum per illuminationem abſolutam π multiplicetur, prodit

$$2\pi^2 [1 - a : \sqrt{(a^2 + x^2)}] = q.$$

quae ergo eſt vera radiorum quantitas.

§. 172. Poſito radio circuli C M infinito, formula abibit in ſequentem

$$q = 2\pi^2.$$

Erit ergo ut factum ex illuminatione abſoluta ſiue ſplendore globi luminoſi in duplam aream circuli ſphaerae maximi. Hinc vel ſua ſponte fluit

THEOREMA XIII.

§. 173. *Quantitas radiorum, quos globus lucidus in planum circulare infinite extenſum proiicit, eadem eſt ac ea, quam in caſu illuminationis abſolutae proiiceret in planum circulare, dimidiae ſuperficiei ipſius globi aequale.*

DEMONSTRATIO.

Illuminatio abſoluta eſt $= \pi$ (§. 133. 168.) Adeoque π denotabit quantitatem radiorum in datum ſpatium $= 1$ incidentium. Quodſi ergo circulus dimidiae ſuperficiei globi aequalis abſolute concipiatur illuminatus, quantitas radio-

radiorum erit $= 2\pi^2$, quippe augetur ut ſpatia adeoque in ratione $1 : 2\pi$. At eadem eſt quantitas radiorum in planum circulare infinitum proiectorum. Unde patet propoſitum.

§. 174. Ut vero rectius intelligatur hoc theorema, notandum eſt, eiusmodi illuminationem, ſi quidem ope globi luminoſi ſtatuatur producta, fictam tantum eſſe. Etſi enim globus centrum iſtius circuli contingat, erit quidem in hoc centro illuminatio abſoluta, at in nullo alio puncto ea obtinebit, unde quantitas radiorum utique minor erit. Quod ut pateat, fiat $x = 1$, $a = 1$, atque habebitur $q = 2\pi\pi\,(1 - \sqrt{\tfrac{1}{2}})$, cum deberet eſſe $= 2\pi\pi$. Similiter claritas circuli media longe erit abſoluta minor. Diuidendo enim $2\pi\pi\,(1 - \sqrt{\tfrac{1}{2}})$ per aream circuli 2π, claritas iſta media erit $= \pi\,(1 - \sqrt{\tfrac{1}{2}})$ quae ad tertiam partem abſolutae nondum aſcendit. Neque tamen eiusmodi illuminatio prorſus ficta eſt, cum obtineat, circulum iſtum hemiſphaerio concauo obtegendo, cuius ſuperficies ſit aeque luminoſa ac ſuperficies globi. At ne quidem opus eſt ut hemiſphaerio obtegatur, cum in eius vicem alia quaecunque ſuperficies caua ſubſtitui poſſit. (§ 90. ſeqq.) Hoc ergo modo intelligenda eſt totius circuli illuminatio abſoluta. Quodſi quis huius vel alius cuiuscunque generis ſuperficies luminoſas parare velit, Phoſphoro utatur vel *Pyrotechniam* conſulat, ubi iſtas parandi docentur media. His ita praenotatis aliud ſubiungimus

THEOREMA XIV.

§. 175. *Quantitas radiorum, qui e tota ſuperficie globi lucidi quaquauerſum emanant eadem eſt ac ea, quae incidit in planum circulare abſolute illuminatum, globique lucentis ſuperſiciei aequale.*

DEMONSTRATIO.

Etenim dicta globi ſemidiametro $= 1$, quantitas radiorum, quos in planum infinitum proiicit eſt $= 2\pi^2$. Quodſi iam globus iſte verſari concipiatur intra duo huiuſmodi plana ſibi inuicem parallela, conſequens eſt cunctos radios e globi ſuperficie emanantes in alterutrum eorum incidere debere, adeoque cunctorum quantitatem eſſe $= 4\pi^2$, duplam nempe eius, quae in unum tantum planum incidit. At vero 4π eſt globi ſuperficies, quae ergo ſi per illuminationem abſolutam π multiplicetur, prodibit $4\pi\pi$ ſiue quantitas radiorum in planum circulare eiusdem magnitudinis in caſu illuminationis abſolutae incidentium; Quae adeo cum priori ſit aequalis, conſtat propoſitum.

Aliter.

Secundam hanc ſuperaddimus demonſtrationem, quae magis eſt directa, priorisque fundamenta rata eſſe veluti exemplo probat. Globum lucidum circumdare concipiatur ſphaera concentrica, cuius radius ſit $= x$; patet, ſingulas huius ſphaerae partes a globo aeque illuminari, erit vero in quouis loco illuminatio $= \pi : xx$. Quare radiorum quantitas, quae per totam ſphaeram diffunditur erit

erit $= \frac{\pi}{xx} \cdot 4\pi xx$; cum illuminatio $\pi : xx$ per aream ſuperficiei ſit multiplicanda. Eſt vero $\frac{\pi}{xx} \cdot 4xx\pi = 4\pi\pi = x$ adeoque iſti radiorum quantitati aequalis, quae in planum abſolute illuminatum globique ſuperficiei aequale incidit.

§. 176. Faciliori hoc exemplo, quo illuſtrandus erat quantitatis radiorum computus (§. 167.) eo libentius uti lubuit, quo plura ſimul in eo euoluendo adhibentur Photometriae principia, atque calculi compendia. Hunc ipſum in finem ſequens quoque ſuperaddemus.

§. 177. Plano horizontali A B C D inſiſtat aliud verticale A F E D, quod ſtatuatur eſſe luminoſum. Quaerenda iam ſit radiorum quantitas in planum horizontale incidens. Etſi ſimpliciſſimum videatur hoc problema, attamen eius ſolutio longe eſt, quam quis crediderit intricatior. Nil enim facilius eſſet quam ad differentiale quarti gradus delabi, cuius quidem integratio quater repetita ſuccederet, at calculi operoſiſſimi taedium vel eos quoque deterreret, qui laboris ſunt patientiſſimi. Quicquid in his obtinere mihi licuit compendii, hoc eſt, ut totum negotium ad differentiale ſecundi gradus adiuuantibus principiis ſupra ſtabilitis, reducere hacque ratione calculum ad finem perducere poſſem. Fig. 20.

§. 178. His enim in auxilium vocatis, quantitatem radiorum in datum quoduis ſpatiolum M m n N e toto plano A F E D incidentium

F 2 ſtatim

ſtatim obtinui, cum alias duplex iſta inſtauranda fuiſſet integratio, quam ſupra uniuerſaliter abſoluimus (§. 142. ſeqq.) At ne hoc quidem directe fieri licuit, ſiquidem breuiori labore rem abſoluere volui. Quare eam ſequenti modo ſum adgreſſus.

§. 179. Productis rectis F G, E H, planum A H concipiatur infinite altum & per ſingulas partes aeque luminoſum, atque ipſi ſubſtitui poterit ſector ſphaericus (§. 91. ſeqq.) qualis in Fig. 15. eſt F C P vel P C B, ita ut particula quaelibet, cuius illuminatio eſt quaerenda, ſit in centro ſphaerae. Simili modo rectangulo A F E D ſubſtituetur ſegmentum ſphaericum lateribus pyramidis M A F E D terminatum. Rectis A G, P Q, D H reſpondebunt circuli verticales, A D referet horizontem, & F E aequatorem. Quodſi iam M P & P Q fuerint ad A D normales, erit Q veluti culmen aequatoris & Q M P eius ſupra horizontem eleuatio, denique F M Q, Q M E erunt arcus in aequatore abſciſſi. Has denominationes maioris perſpicuitatis ergo adhibemus (§. 154.)

§. 180. Rectae P M ducta ſit infinite vicina & parallela p N. Per punctum M tranſeat normalis R M S, denique ducantur M A, M D, M F, M E, P F, P E, R D.

Fiat porro

$AF = a \quad AP = x \quad FMQ = v$

$AD = b \quad PM = y \quad FPQ = \omega$

Illuminatio in M plano ſuperiori G F E H debita ſit $= n$, quantitas radiorum in ſpatiolum M m n N incidens $= ddQ$, atque erit (§. 154. 179.) $n = \frac{1}{2}$ F M E. coſ. Q M P.

qui

qui valor abit in duos sequentes

$$\eta = \tfrac{1}{2} FMQ.\cos QMP + \tfrac{1}{2} QME.\cos QMP.$$

ita ut terminus prior exhibeat quantitatem radiorum a parte sinistima, posterior vero a parte dextima in spatiolum $= 1$, incidentium. Hinc erit

$$ddQ = \eta\, dy\, dx = (\tfrac{1}{2} FMQ.\cos QMP + \tfrac{1}{2} QME.\cos QMP)\, dy\, dx.$$

§. 181. Cum utraque pars huius differentialis eodem modo tractanda veniat, priorem tantum ad finem perducemus. Sit ergo quantitas radiorum ipsi debita $= ddq$, erit

$$ddq = \tfrac{1}{2} FMQ.\cos in\, QMP.\, dy\, dx.$$

siue valoribus substitutis

$$\frac{2\,ddq}{dx} = v\,y\,dy : \sqrt{(y^2 + a^2)}$$

Est vero

$$\tang v = x : \sqrt{(y^2 \mp a^2)}$$

adeoque, cum primo quaerenda sit quantitas radiorum, qui in rectangulum PMNP incidunt, posita x const. erit

$$ydy = -x^2 \cot v\, d\cot v = -x\sqrt{(y^2 + a^2)}\, d\cot v.$$

Quo valore substituto prodit

$$\frac{2\,ddq}{x\,dx} = \quad v\, d\cot v$$

hinc integrando

$$\frac{2\,dq}{x\cdot dx} = v\cot v - \log \sin v + \text{const.}$$

§. 182. Euanescente y, nulli amplius radii incidunt, unde fiet $dq = 0$. Sed posita $y = 0$, erit

erit $v = \omega$, cum triangula FMQ, FPQ coincidant, erit ergo

$$\text{conſt} = -\omega \cot \omega + l \sin \omega.$$

qua adiecta habetur

$$\frac{2\,dq}{x\,dx} = v \cot v - l \sin v - \omega \cot \omega + l \sin \omega.$$

§. 183. Ut iam & altera abſoluatur integratio, qua obtinetur radiorum quantitas, quae in totum planum incidit, animaduertendum eſt, notam eſſe debere aequationem inter abſciſſam x & ordinatam y, quoties figura plani ſtatuitur curuilinea, qua data, alterutra harum variabilium e differentiali eliminanda eſt. At hic planum ponimus eſſe rectangulum, unde erit y conſt. cum quaerenda ſit radiorum quantitas ea, quae in ſpatium ARMP incidit. Erit ergo

$$2\,dq = v \cot v\, x\,dx - l \sin v .\, x\,dx - \omega \cot \omega\, x\,dx + l \sin \omega\, x\,dx$$

Sed ob

$$x = \surd(y^2 + a^2), \text{ tang } v = a \text{ tang } \omega,$$

erit

$$x\,dx = (y^2 + a^2) \text{ tang } v\, d \text{ tang } v = a^2 \text{ tang } \omega .\, d \text{ tang } \omega$$

adeoque ſubſtituendo

$$2\,dq = (y^2 + a^2).(v\,dtv - l \sin v .\, tv .\, dtv) - a^2 (\omega\, dt\omega - l \sin \omega .\, t\omega\, dt\omega)$$

& integrando tandem erit

$$q = \tfrac{1}{2}(y^2 + a^2).(v\,tv - \tfrac{1}{2} tv^2 l \sin v + \tfrac{1}{2} l \cos v) - \tfrac{1}{2} a^2 (\omega\, t\omega - \tfrac{1}{2} t\omega^2 l \sin \omega + \tfrac{1}{2} l \cos \omega)$$

Quae ergo eſt quantitas radiorum in partem APMR a parte ſiniſtima incidentium. Conſtante non eſt opus, cum x, v, ω & q ſimul euaneſcant.

§. 184.

§. 184. Eodem modo reperietur quantitas radiorum a dextima parte incidentium in ſpatium

$$DPMS = \dot{q} = \tfrac{1}{2}(y^2 + a^2).(QME.\,\mathrm{tang}\,QME - \tfrac{1}{2}tQME.l\,\mathrm{ſin}QME + \tfrac{1}{2}l\,\mathrm{coſ}QME) - \tfrac{1}{2}a^2(QPE.tQPE - \tfrac{1}{2}tQPE\,l\,\mathrm{ſin}QPE + \tfrac{1}{2}l\,\mathrm{coſ}QPE)$$

ſimiliter in ſpatium

$$DARS = \ddot{q} = \tfrac{1}{2}(y^2 + a^2).(FRE.tFRE - \tfrac{1}{2}tFRE\,l\,\mathrm{ſin}FRE + \tfrac{1}{2}l\,\mathrm{coſ}FRE) - \tfrac{1}{2}a^2(FAE.tFAE - \tfrac{1}{2}tFAE\,l\,\mathrm{ſin}FAE + \tfrac{1}{2}l\,\mathrm{coſ}FAE)$$

Unde tandem erit quantitas in ſpatium RAPM ab utraque parte incidens

$$Q = q + \ddot{q} - \dot{q}.$$

§. 185. Quantitas vero in totum ſpatium

ADSR incidens eſt $= 2\ddot{q}$, dupla nempe eius, quae in idem ſpatium a parte dextima vel ſiniſtima incidit.

§. 186. Quantitates iſtae debentur ſpatio infinito ſuperiori GFEH. Unde mutata ſaltem altitudine $PQ = a$, inueniri poterunt quantitates radiorum cuilibet ſegmento vel rectangulo plani GADH debitae.

§. 187. Omnes iſtae formulae partiales ita ſibi ſunt ſimiles, ut eadem angulorum reſpondentium functio omnes ingrediatur. Quodſi ergo pars

$$\tfrac{1}{2}(vtv - \tfrac{1}{2}tv^2 l\,\mathrm{ſin}v + \tfrac{1}{2}l\,\mathrm{coſ}v)$$

quae ab angulo $v = \text{FMQ}$ pendet, breuitatis gratia dicatur $= \varphi v = \varphi.\text{FMQ}$. patet similem partem

$$\tfrac{1}{2}(\omega \cot \omega - t\omega^2 . l \sin \omega + \tfrac{1}{2} l \cos \omega)$$

quae respondet angulo $\omega = \text{FPQ}$, exprimi posse per $\varphi \omega = \varphi.\text{FPQ}$. Hinc itaque contractis prolixioribus his formulis, breuissime erit

$$\begin{aligned} \text{Q} = & (y^2 + a^2)\varphi\text{FMQ} - a^2\varphi\text{FPQ} \\ & + (y^2 + a^2)\varphi\text{FRE} - a^2\varphi\text{FAE} \\ & - (y^2 + a^2)\varphi\text{QME} + a^2\varphi\text{QPE}. \end{aligned}$$

siue hanc iterum contrahendo

$$\begin{aligned} \text{Q} = & (y^2 + a^2).(\varphi\text{FMQ} + \varphi\text{FRE} - \varphi\text{QME}) \\ & - a^2 (\varphi\text{FPQ} + \varphi\text{FAE} - \varphi\text{QPE}) \end{aligned}$$

§. 188. Quodsi iam plano GFEH totum planum GADH substituatur, dicta quantitate incidentium $= \text{R}$, erit $a = o$, unde

$$\text{R} = y^2 (\varphi\text{AMP} + \varphi\text{ARD} - \varphi\text{PMD})$$

Et quantitas radiorum a plano AFED in planum ARMP proiectorum erit

$$\begin{aligned} \text{R} - \text{Q} = & y^2 (\varphi\text{AMP} + \varphi\text{ARD} - \varphi\text{PMD}) \\ & + a^2 (\varphi\text{FPQ} + \varphi\text{FAE} - \varphi\text{QPE}) \\ & - (y^2 + a^2).(\varphi\text{FMQ}\ \varphi\text{FRE} - \varphi\text{QME}) \end{aligned}$$

Quae quantitas erit quaerenda.

§. 189. At cum haec formula ab utroque plano eodem prorsus modo pendeat, hinc elucescit

THEO-

THEOREMA XV.

§. 190. *A plano* AFED *eadem in planum* ARMP *incidit radiorum quantitas, quae viciſſim a plano* ARMP *incidit in planum* AFED, *ſi in utroque caſu utrumque fuerit aeque luminoſum.*

DEMONSTRATIO.

Etenim comparatione inſtituta ſubſtitutum iri videbis

altitudini a — altitudinem y
longitudini y — longitudinem a
angulo AMP — angulum = FPQ ⎫
...... ARD — .... = FAE. ⎬ & viciſſim
...... PMD — .... = QPE ⎭
angulis FMQ ⎫
FRE ⎬ — angulos aequales
QME ⎭

Unde eadem prodibit formula. Ceterum theorema hoc latius patere poſtea videbimus.

§. 191. Si plano A R M P ſubſtituatur totum planum A R S D, formula vehementer contrahetur, eritque

$$R - Q = 2y^2 \phi \text{ ARD} + 2a^2 \phi \text{ FAE} - 2(y^2 + a^2) \phi \text{ FRE}.$$

§. 192. Quodſi porro ſumatur totum planum GADH, erit (§ 188.)

$$R = 2y^2 (\phi \text{ ARD})$$

Cui aequalis eſt quantitas radiorum, quos in caſu ſecundo theorematis praecedentis planum ARSD proiicit in planum GADE, infinite altum (§. 190.)

§. 193. Similiter ſi planum BADC ponatur infinite longum, manente latitudine AD, quan-

quantitas radiorum, quos planum AFED in iſtud proiiciet, erit $= 2a^2 \varphi$ FAE.

§. 194. Quodſi iam planum AFED quatuor eiusmodi claudatur lateribus, ut ſit inſtar fundi priſmatis infinite longi, patet, omnes radios ex eo emanantes in unum alterumue horum laterum incidere debere. Quare quantitas cunctorum radiorum e plano AFED emanantium erit $E = 8a^2 \varphi$ FAE, ſiue dicto angulo FAE $= \gamma$, erit iſta quantitas

$$E = 4a^2 (\gamma \operatorname{tang} \gamma - \tfrac{1}{2} t \gamma^2 . l \sin \gamma + \tfrac{1}{2} l \operatorname{cos.} \gamma)$$

Hoc vero tantum obtinet ſi latera plani AFED ſint aequalia, quo caſu porro erit $\gamma = 45° = \frac{1}{4}\pi$, $\operatorname{tang} \gamma = 1$, $\sin \gamma = \operatorname{cos.} \gamma$. adeoque formula abit in ſimpliciſſimam hanc

$$E = aa\,\pi.$$

§. 195. Contra ea, ſi latera a, b fuerint inaequalia, lumen quoque in plana contigua incidens erit inaequale. Quare hoc caſu habetur

$$E = 4a^2 \varphi \text{ FAE} + 4b^2 \varphi \text{ EAD}.$$

Eſt vero EAD $= 90° -$ FAE $= \frac{1}{2}\pi - \gamma$ adeoque erit

$$E = 2a^2 \gamma \operatorname{tang.} \gamma - aat\gamma^2 \sin\gamma + aal \operatorname{cos.} \gamma$$
$$+ 2b^2 (\tfrac{1}{2}\pi - \gamma) \cot\gamma - bb \cot \gamma^2 l \operatorname{cos.} \gamma + bbl \operatorname{sin.} \gamma$$

Sed a tang $= b$, $b \cot \gamma = a$, unde breuiſſime erit

$$E = \pi\, ab.$$

Ut adeo & hic emanatio & illuminatio abſoluta eadem conſtet radiorum quantitate. Quod iam de illuminatione reciproca quacunque demonſtrabimus. (§. 129.)

THEO-

THEOREMA XVI.

§. 196. Si duae sint superficies ALKD, FEI aeque luminosae sibique mutuo utcunque obuersae, quantitas radiorum ex unaquaque in alteram incidentium est aequalis. Fig. 21.

DEMONSTRATIO.

I° Concipiantur duae particulae infinite paruae AH, GF, quantitas radiorum ex alterutra in alteram incidentium exprimetur per factum ex utraque area, sinu anguli incidentiae & sinu anguli emissionis. At vero in utroque casu areae sunt eaedem, & sinus isti reciprocantur, quare factum hoc cum in utroque casu sit idem, patet tot ex AH in GF incidere radios, quot ex GF in AH incidunt.

II° Manente particula AH euidens est, idem locum habere de quauis alia superficiei FEI particula, unde singulis istis illuminationibus in summam contractis, ex tota superficie EFI in particulam AH eadem incidet radiorum quantitas, quae vice versa e spatiolo AH in superficiem EFI incidit.

III° Quod idem cum de singulis superficiei ALKD spatiolis valeat, similiter de earum summa valebit. Constat ergo propositum.

§. 197. Cum itaque utraque quantitas una eademque opera determinetur, insigne nobis hoc theorema in uniuersa Photometria subministrat calculi compendium. Non modo enim iteratae ipsius instaurationi supersedere lice-

licebit, verum & quoties alteruter casus fuerit altero difficilior, hunc veluti invertendo, faciliorem perlustrare sufficiet.

§. 198. Quodsi loco alerutrius superficiei tantummodo consideretur eius particula infinite parua, qualis ponitur esse A N, non opus erit ut huius areolam in calculum inducamus, nisi aliae id suadeant rationes. Sumere enim licebit spatiolum, quod ponitur $= 1$, atque calculum subducendo determinabitur quantitas radiorum e spatiolo isto in datam superficiem EIF vel ex hac in illud incidentium. Quodsi vero iam spatiolo isti substituenda sit ea magnitudo, quam requirit calculi institutum, v. gr. dq, dx &c. facile patet, quantitatem radiorum per hanc aream esse multiplicandam.

§. 199. Binis exemplis hactenus expositis tertium iungamus eo curatius euoluendum, quo in sequentibus amplior est eius usus, cum de claritate imaginis in foco lentium & speculorum occurret quaestio. Infiniti enim in his casibus dantur coni luminosi obliqui, ut adeo in antecessum determinanda sit radiorum quantitas, qua singuli gaudent.

§. 200. Sit ergo BHGF circulus planus luminosus, vel illuminandus, quem maioris perspicuitatis ergo horizontalem esse ponemus. In A sit particula superficiei plano circuli parallelae vel horizontalis, quaeue circulum B G vel illuminet, vel ab eo illuminetur, patet radios emanantes vel incidentes constituere conum luminosum obliquum, cuius basis est circulus BHG, & axis AC ad basin erit inclinatus

Fig. 22.

natus. Cumque superficies in A sit basi parallela, axis CA ad eam eodem modo erit inclinatus. Quod idem cum obtineat pro quibusuis aliis rectis PA, patet, angulos emanationis & incidentiae esse aequales. Recta AD sit verticalis, & ad eam ducatur normalis CD, erit D punctum A veluti in planum circuli BHG proiectum, & DAC erit inclinatio axeos AC. Denique area spatioli A dicatur $= 1$.

§. 201. Sumto iam puncto quolibet P, ductaque AP, patet rotatione trianguli DPA circa axin AD, punctum P percurrere arcum MPN, cui si eodem modo descriptus concipiatur infinite vicinus mpn, habebitur segmentum annulare MNnm, atque radii ipsi debiti sub iisdem angulis emanant & incidunt. Quaeritur iam primo eorum quantitas, quam dicemus $= dq$.

§. 202. Quod ut fiat, ponatur

altitudo verticis DA $= 1$.
Distantia centri CD $= a$.
semidiameter CB $= x$.

Porro ductis DM, MC vocetur.

distantia DP $=$ DM $= z$.
angulus ..... MDC $= v$.
.... MCX $= \xi$.
.... DAP $= \omega$.

erit

$$z = \text{tang}\ \omega$$
$$AP = \sqrt{(1 + zz)} = \text{sec.}\ \omega.$$
$$\text{area MNnm} = 2vzdz = 2v \sin \omega . d\omega : \cos \omega^3.$$

Adeoque cum quantitas radiorum sit directe ut

ut area & ſinus angulorum emanationis & incidentiae, reciproce ut quadratum diſtantiae habebimus.

$$dq = 2v. \frac{\text{ſin}\,\omega\,d\omega.}{\text{coſ.}\,\omega^3}\ \text{coſ.}\,\omega.\ \text{coſ.}\,\omega : \text{ſec.}\,\omega^2,$$

ſiue debita facta reductione

$$dq\ \ 2v.\ \text{ſin}\,\omega.\ d\ \text{ſin}\,\omega$$

Unde fit

$$dq = d(v\ \text{ſin}\,\omega^2) - \text{ſin}\,\omega^2\,dv.$$

§. 203. Eſt vero pro triangulo MDC

$$2az\ \text{coſ.}\,v = z^2 + a^2 - x^2.$$

Poſita breuitatis ergo

$$a^2 = b^2 + x^2$$

erit

$$2a\ \text{coſ.}\,v = z + bb : z$$

hinc vero

$$-dv = \frac{zdz - bbdz : z}{\sqrt{(4a^2z^2 - (zz + bb)^2)}}$$

Et ob

$$\text{ſin}\,\omega^2 = zz : (1 + zz)$$

erit

$$-\text{ſ.}\,\omega^2.\,dv = \frac{(zz - bb)\,zdz}{(1+zz)\sqrt{(4a^2z^2 - (zz+bb)^2)}}$$

Fiat porro $(zz + bb) = 2y + 2aa$,

ſiue $zz = 2y + aa + xx.$

erit

$$-\text{ſ.}\,\omega^2\,dv = \frac{(xx + y)\,dy}{(1+a^2+x^2+2y)\sqrt{(a^2x^2 - y^2)}}$$

Ut

Ut vero & haec formula reddatur concinnior, primo diuisione mutetur in sequentem

$$-\int \omega^2 dv = \frac{dy}{\sqrt{(a^2x^2-y^2)}}$$

$$- \frac{(1+bb)\,dy}{(1+a^2+x^2+y^2)\sqrt{(a^2x-y^2)}}$$

§. 204. Deinde fiat

$$1+bb = 2cax \text{ siue } c = (1+bb):2ax$$

$$1+a^2+x^2 = 2eax \text{ siue } e = (1+a^2+x^2):2ax$$

$$y = ax - s \text{ siue } s = y:ax = \frac{aa+xx-zz}{2ax}$$

Atque substitutione facta prodibit

$$-2\int \omega^2 dv = \frac{ds}{\sqrt{(1-ss)}} - \frac{c\,ds}{(e+s)\sqrt{(1-ss)}}$$

Unde statim patet, s debere esse sinum arcus cuiusdam circularis siue anguli. At vero si eius valor

$$- s = \frac{aa+xx-zz}{2ax}$$

cum triangulo DMC conferatur, facile reperitur esse

$$\frac{aa+xx-zz}{2ax} = \text{cosin MCD}.$$

Unde habetur

$$s = \text{cosin MCG} = \text{sin HMC} = \text{sin}\,\xi.$$

§. 205. Erit ergo substitutione facta

$$-2 \text{ sin } \omega^2 dv = d\xi - \frac{c\,d\xi}{e+\text{sin}\,\xi}$$

siue

$$dq = d(v \text{ sin } \omega^2) + d\xi - \frac{c\,d\xi}{e+\text{sin}\,\xi}$$

§. 206.

§. 206. Ut porro ultimum membrum huius aequationis ab irrationalitate liberetur, ponatur.

$$\text{tang } \tfrac{1}{2}\xi = \zeta$$

eritque

$$\sin \xi = \frac{2\zeta}{1+\zeta\zeta}$$

$$d\xi = \frac{2d\zeta}{1+\zeta\zeta}$$

adeoque

$$\frac{c\,d\xi}{e+\sin\xi} = \frac{2c\,d\zeta}{e+e\zeta\zeta+2\zeta}$$

Cuius integrale est

$$\frac{2c}{\sqrt{(ee-1)}}\text{Arc. tang.}\left(\frac{e\zeta+1}{\sqrt{(ee-1)}}\right)$$

Unde adeo

$$q = v\sin\omega^2 + \tfrac{1}{2}\xi - \frac{c}{\sqrt{(ee-1)}}\text{Arc tang}\frac{e\zeta+1}{\sqrt{(ee-1)}} + \text{Const.}$$

Constans sic addenda ut q euanescat, cum fuerit $z = DB$. Erit vero hoc casu $v = 0$, $-\xi = \frac{1}{2}\pi$, $\zeta = -1$, adeoque

$$\text{Const.} = +\tfrac{1}{4}\pi - \frac{c}{\sqrt{(ee-1)}}\text{Arc.tang.}\sqrt{\frac{e-1}{e+1}}$$

Ut adeo quantitas radiorum spatio lenticulari MBNP debita sit

$$q = v\sin\omega^2 + \tfrac{1}{2}\xi + \tfrac{1}{4}\pi - \frac{c}{\sqrt{(ee-1)}}\left(\text{Arc.tang.}\sqrt{\frac{e+1}{e-1}} + \text{Arc.tang.}\frac{e\zeta+1}{\sqrt{(ee-1)}}\right)$$

§. 207.

§. 207. Quodsi iam quaeratur quantitas radiorum pro toto circulo, faciendum $z = DG$, unde erit $v = 0$, $\xi = +\frac{1}{2}\pi$, $\zeta = +1$.
adeoque

$$Q = \tfrac{1}{2}\pi - \frac{c}{\sqrt{(ee-1)}}\left(\text{Arc.tang.}\sqrt{\frac{e+1}{e-1}} + \text{A.t.}\sqrt{\frac{e-1}{e+1}}\right)$$

At vero ob $\sqrt{\frac{e+1}{e-1}} = 1 : \sqrt{\frac{e-1}{e+1}}$, erit arcus alter alterius complementum, ut adeo utriusque summa sit quadrans $= \frac{1}{2}\pi$, adeoque formula ita contrahetur, ut pro toto circulo sit

$$Q = \tfrac{1}{2}\pi\left(1 - \frac{c}{\sqrt{ee-1}}\right)$$

Est vero

$$c = \frac{1 + a^2 - x^2}{2ax}$$

$$e = \frac{1 + a^2 + x^2}{2ax}$$

Unde substituendo tandem fit

$$Q = \tfrac{1}{2}\pi\left[1 - \frac{1 + a^2 - x^2}{\sqrt{((1 + a^2 - x^2)^2 + 4xx)}}\right]$$

Qua ergo aequatione quantitas radiorum pro toto circulo datur per rectas AD, DC, BC, quae omnium facillime innotescunt.

§. 208. Dabitur vero quoque per angulos. Ducta enim tangente DE, ad eam demittatur normalis CDE, & iungantur EA. Dicto iam angulo $CDE = w$, $DAE = \phi$, erit

$$DE^2 = a^2 - x^2 = \text{tang}\,\phi^2.$$

$$AE^2 = 1 + a^2 - x^2 = \sec\phi^2$$

$$CE = x = \text{tang.}\phi\ \text{tang}\,w.$$

 Unde

Unde

$$Q = \tfrac{1}{2}\pi\left(1 - \sqrt{\frac{\sec\phi^4}{\sec\phi^4 + 4\tan\phi^2 \tan w^2}}\right)$$

siue

$$Q = \tfrac{1}{2}\pi - \tfrac{1}{2}\pi \frac{1}{\sqrt{(1 + tw^2 \sin 2\phi^2)}}$$

Ex puncto E ducatur recta talis ut angulus DKA sit $= 2\phi = 2DAE$, erit

$$DE^2 : KE^2 = \sin 2\phi^2$$

$$EC^2 : KE^2 = \sin 2\phi^2 . \tan w^2 .$$

$$CK^2 : KE^2 = 1 + \sin 2\phi^2 \tan w^2 .$$

Unde $Q = \tfrac{1}{2}\pi(1 - \cos CKE) = \pi(\sin \tfrac{1}{2} CKE)^2$

§. 209. In toto hoc calculo altitudinem vel distantiam planorum AD per unitatem expressimus, quod utique facere licuit (§.91.92.) Ad eam tamen in hoc casu ceterae rectae sunt reuocandae. Quare ut cuicunque formula ante erutata adaptetur mensurae, dicta $AD = h$, euidens est, fore

$$Q = \tfrac{1}{2}\pi\left[1 - \frac{b^2 + a^2 - x^2}{\sqrt{((b^2 + a^2 - x^2)^2 + 4x^2 b^2)}}\right]$$

§. 210. Quantitas radiorum Q debetur toti circulo BHGF, siue ex hoc incidant in spatiolum $A = 1$, siue ex hoc spatiolo in circulum irruant. Priori casu habetur ipsa claritas vel illuminatio particulae A, cum huius aream sumsimus esse $= 1$. Ut iam consensus formulae erutae cum superioribus ostendatur, eam ad casus quosdam adplicabimus.

§. 211.

§. 211. Ponatur $a = o$, Centrum circuli C cadet in verticem D, atque erit

$$Q = \tfrac{1}{2}\pi\left(1 - \frac{bb - xx}{bb + xx}\right) = \frac{\pi xx}{bb + xx}$$

Eſt vero $xx : (bb + xx)$ quadratum ſinus ſemidiametri adparentis, huic igitur quantitas Q erit proportionalis. Quod convenit cum ſupra demonſtratis (§. 109. 121.)

§. 212. Si fiat $a = b = o$, erit $Q = \pi$. obtinet ergo illuminatio vel emanatio abſoluta. (§. 100. 123.)

§. 213. Ponendo ſemidiametrum x infinite paruam, habebitur

$$Q = \frac{bbxx\pi}{(bb + aa)^2}$$

Eſt vero πxx circuli area vera, $\pi xx . b : (bb + aa)^{3:2}$ eius magnitudo adparens, & $b : \sqrt{(bb + aa)}$ ſinus anguli incidentiae, unde Q eſt factum ex hoc ſinu in aream adparentem, quod vel per ſe eſt euidens.

§. 214. Sit iam circulus MDE cuius centro A verticaliter immineat centrum circuli BC ipſi MDE paralleli, erit AC axis per utriusque circuli centrum normaliter tranſiens. Poſito iam alterutro luminoſo, quaeritur quantitas radiorum in alterum incidentium. Quod ut fiat dicatur Fig. 23.

Diſtantia circulorum $AC = b$
ſemidiameter illuminantis $CB = b$
ſemidiameter illuminati $AM = x$

Circulo MED ductus concipiatur infinite vicinus m e concentricus atque in Mm ſumatur

ſpatiolum, quod ſit $= 1$, erit denſitas radiorum in hoc ſpatiolum incidens (209.)

$$= \frac{\pi}{2}\left[1 - \frac{(bb--bb+xx)}{\sqrt{(4b^2b^2+(bb--bb+xx)^2)}}\right]$$

Quae denſitas cum per totum annulum MDE ſit eadem, erit radiorum in eum incidentium quantitas ut eius area. At haec eſt $= 2\pi x dx$, adeoque dicta quantitate $= dq$, erit

$$dq = \pi\pi\left[xdx - \frac{(bb--bb+xx)xdx}{\sqrt{(4b^2b^2+(bb--bb+xx)^2)}}\right]$$

Cuius integrale eſt

$$q = \tfrac{1}{2}\pi\pi[xx - \sqrt{(4b^2b^2+(bb--bb+xx)^2)} + \text{conſt.}]$$

§. 215. Conſtans habetur ponendo q & x ſimul euaneſcere. Quare erit $= (bb+bb)$, qua addita

$$q = \tfrac{1}{2}\pi\pi\,[xx+bb+bb - \sqrt{(4b^2b^2+(bb--bb+xx)^2)}]$$

ſiue hac aequatione debite reducta

$$q = \tfrac{1}{2}\pi\pi[bb+bb+xx - \sqrt{((bb+bb+xx)^2 - 4x^2b^2)}]$$

Qui valor eſt radix aequationis

$$q^2 - \pi^2(bb+bb+xx)q + x^2b^2\pi^4 = 0$$

§. 216. Cum haec aequatio ab utroque radio b & x aeque pendeat, patet, eandem prodire radiorum quantitatem, uter circulorum ſtatuatur luminoſus (§. 196.)

§. 217. At formulam erutam

$$q = \tfrac{1}{2}\pi\pi[bb+xx+bb \quad \sqrt{((bb+xx+bb)^2 - 4x^2b^2)}]$$

eleganter contrahere licet. Sint enim BCF, MA parallelae, ducanturque MB, MF, erit

$$MB^2 = bb+bb+xx - 2bx$$
$$MF^2 = bb+bb+xx+2bx$$

adeo-

adeoque

$$\frac{MB^2+MF^2}{2} = bb+bb+xx.$$

$$MB^2MF^2 = (bb+bb+xx)^2 - 4bbxx$$

His valoribus substitutis, non modo tollitur irrationalitas, verum & formula abit in quadratum purum, eritque

$$q = \tfrac{1}{4}\pi\pi(MF - MB)^2.$$

Unde fluit

THEOREMA XVII.

§. 218. *Sit* BMEF *conus luminosus talis, ut segmentorum* BF, ME *ad axin* CA *normalium, alterum ab altero illuminetur, ducta* MF, *factaque* MG = MB, *dico, quantitatem radiorum coni istius fore aequalem facto ex illuminatione absoluta* π *in aream circuli, cuius diameter* = GF. Fig. 24.

DEMONSTRATIO.

Est enim vi § praecedentis

$$q = \tfrac{1}{4}\pi\pi\,(MF - MB)^2$$

Sed per constructionem

$$MF - MB = GF$$

Unde

$$q = \tfrac{1}{4}\pi\pi GF^2$$

Est vero π illuminatio absoluta (§. 123.) & $\frac{1}{4}\pi$. GF^2 area circuli, cuius diameter = GF. Constat ergo propositum. Nec minus concinnum est sequens

THEOREMA XVIII.

219. *Ea est in cono luminoso* MBFE *radiorum quantitas, quae in casu illuminationis absolutae incideret in spatium circuli, cujus diameter* = GF.

DEMONSTRATIO.

Etenim π eſt quantitas radiorum, quae in caſu illuminationis abſolutae incidit in ſpatium $= 1$, adeoque q $\frac{1}{4}\pi\pi$. GF^2 erit quantitas in eodem caſu in ſpatium $= \frac{1}{4}\pi GF^2$ incidens. At vero hoc ſpatium eſt area circuli, cuiusdiameter $= GF$. Quare patet propoſitum.

THEOREMA XIX.

§. 220. *Si ſegmentum* BF *a ſegmento* ME *illuminetur, claritas ipſius* BF *media eſt ad eius claritatem in caſu illuminationis abſolutae, ut* FG^2 *ad* FB^2.

DEMONSTRATIO.

Etenim claritas media habetur, quantitatem radiorum coni luminoſi MBFE per aream ſegmenti BC dividendo. Eſt vero area $= \frac{1}{4}\pi . BF^2$, & quantitas radiorum (§. 218.) $= \frac{1}{4}\pi^2 GF^2$, unde claritas media $= GF^2 . \pi : BF^2$. Cum iam illuminatio abſoluta ſit π erit

$$\frac{\pi GF^2}{BF^2} : \pi = FG^2 : FB^2.$$

Quod erat demonſtrandum.

§. 221. Vel me tacente patet idem valere de ſegmento MDE, ſi hoc a ſegmento BF illuminetur (§. 215.) Erit enim claritas media ad claritatem in caſu illuminationis abſolutae ut FG^2 ad MF^2. Porro ob $FE = BM$, erit quoque $FM - FE$ $FM - BM = FG$. (§. 218.) ut adeo perinde ſit ſiue triangulo MBF ſiue altero MFE utaris, cum hic tantummodo crurum differentia ſpectanda veniat.

§. 222.

§. 222. Cum porro per constructionem quatuor puncta B, M, E, F sint in circulo, erit

$$BE.MF = BM.FE + BF.ME$$

Sed est

$$BE = MF$$
$$BM = FE$$

quare

$$MF^2 = BM^2 + BF.MF$$

unde fit

$$(MF - BM) = \frac{BF.ME}{MF + BM} = GF$$

Est vero (§. 218.)

$$q = \tfrac{1}{4}\pi\pi.GF^2$$

Quare erit

$$q = \frac{\pi\pi.BF^2ME^2}{4(MF+BM)^2}$$

Recta GF bifariam secetur in H, erit

$$MH = \tfrac{1}{2}(MF+BM)$$

adeoque

$$q = \pi\pi\frac{(BC^2.MA^2)}{MH^2}$$

Unde iterum fluit

THEOREMA XX.

§. 223. *Si* $MH = \frac{1}{2}(MB+MF)$ *spectetur ut unitas, dicta illuminatione absoluta* $= \pi$, *quantitas radiorum in cono luminoso* MBFE *erit factum ex area segmenti illuminantis in aream segmenti illuminati.*

DEMONSTRATIO.

Est enim

$$\pi.BC^2 = \text{areae segmenti BCF.}$$
$$\pi.MA^2 = \text{areae segmenti MDE.}$$

 Qua-

Quare cum ponatur MH $=1$. erit

$$q=\pi\, BC^2.\pi.MA^2$$

adeoque ut factum alterutrius areae in alteram (§. 219.)

THEOREMA XXI.

§. 224. *Claritas media segmenti illuminati erit ad claritatem in casu illuminationis absolutae, ut quadratum semidiametri segmenti illuminantis ad quadratum rectae* MH.

DEMONSTRATIO.

Habetur enim claritas media, quantitatem radiorum per aream illuminatam dividendo. Dicta ergo claritate media $=c$, erit, si planum BF illuminetur,

$$c=\frac{q}{\pi\cdot BC^2}=\frac{\pi.AM^2}{MH^2}$$

unde fit

$$c:\pi=AM^2:MH^2$$

Si vero illuminetur segmentum MDE, erit

$$c=\frac{q}{\pi.MA^2}=\frac{\pi.BC^2}{MH^2}$$

quare

$$c:\pi=BC^2:MH^2.$$

Pro utroque ergo casu constat theorematis effatum.

§. 225. Quodsi MH transferatur ex M in K, & ex F in I, erit claritas media

segmenti MDE $=\pi.(\sin KIF)^2$
segmenti BF $=\pi.(\sin MKI)^2$

Unde

Unde patet theorematis praesentis cum theoremate V. (§. 109.) *consensus & analogia.* Anguli enim MKI, KIF sunt semidiametri adparentes segmentorum illuminantium, si e punctis K & I spectentur.

CAPVT III.

Experimentis ad examen reuocatur oculi iudicium, primaque firmantur Photometriae principia.

§. 226. Quae in superioribus (§. 54. 55.) dubia videri posse diximus, prima, quibus Photometria superstruitur fundamenta, ea iam veluti extrema tentando non populari, quod aiunt trutina, verum aurificis statera examinare propositum est, ut firma sint nec ne euidens fiat, quam quod euidentissimum. Eo quoque lubentius in hanc descendimus arenam, quo amplior est usus methodi, qua in hoc negotio erit utendum, ut res omnis ad liquidum perducatur.

§. 227. Principia vero, quorum hic examinanda est veritas, haec sunt.

I° *Illuminationem maiorem esse in ratione numeri candelarum, vel luminum, vel punctorum radiantium, a quibus charta vel planum ipsis obiectum collustratur.*

II° *Eandem esse eo minorem, quo maius est quadratum distantiae plani illuminati a corpore luminoso.*

III° *Eam decrescere in ratione sinus anguli incidentiae.*

§. 228. Nullam harum legum ſeorſim experimentis firmari poſſe, iam monuimus (§. 54.) Vidimus porro, una earum admiſſa, ceteris quoque experientiam calculum adiicere, ut adeo mutuo ſeſe vel probent vel deſtruant. (§. 55.) Prius vero obtineat an poſterius hoc eſt, in quod paullo curatius inquiremus. Quem in finem harum legum primam cum ſecunda, poſtea quoque cum tertia comparabimus, ut earum nexus clarius pateat.

§. 229. Reſumamus itaque Experimentum, quod ſupra (§. 58.) deſcripſimus primum vel quod ipſi analogum eſt ſecundum (§. 59.) Quicquid ex eo, abſque hypotheſi concludere licet, eo recidit, *ut eadem prodeat illuminatio, ſi numerus candelarum fuerit in ratione duplicata diſtantiae.* Haec poſitio cum adeo neceſſario inde fluat, ut ea reiecta, manente aequalitate claritatis candelarum & albedine plani quo lumen normaliter incidens excipitur, aequalis illuminatio obtineri non poſſit; ita ipſa inſtar axiomatis utemur.

§. 230. Ut tamen methodus qua utemur, in anteceſſum exemplo faciliori illuſtretur, ponemus experimentum ita fuiſſe inſtitutum ut numerus candelarum in A ſemper duplum eſſet earundem numeri in K, utque adeo in omni caſu diſtantia KC eſſet ad diſtantiam AB $= 1 : \sqrt{2}$. Quaeritur, qua ratione hinc concluſionem inferre liceat, quae uniuerſalius ad proportionem inter numerum candelarum quemcunque protendatur, ita ut manente illuminatione detegatur diſtantia numero

Fig. 2.

mero

mero candelarum cuicunque reſpondens & viciſſim dato hoc reperiatur illa?

§. 231. Quaeſtio haec ut ſoluatur, dicta ſit diſtantia quaelibet $=x$, numerus candelarum reſpondens $=y$. Qualiscunque vero ſit inter has quantitates relatio, conſtat eam generaliſſime exprimi poſſe per ſeriem huius formae ut ſit

$$(A)\ y = \alpha + \beta x^m + \gamma x^n + \delta x^p + \&c.$$

Etenim in eiusmodi ſeriem quantitates utcunque irrationales mutare licet.

§. 232. At vero iam definiendi ſunt huius ſeriei coefficientes & exponentes. Quod ut fiat, vi experimenti (§. 230.) in hac ſerie pro diſtantia x ſubſtituatur $x\sqrt{2}$, atque patet loco ipſius y ſubſtituendum eſſe $2y$, ut ſit

$$(B)\ 2y = \alpha + \beta x^m . 2^{m:2} + \gamma x^n . 2^{n:2} + \&c.$$

erit ergo $2A = B$, quare faciendo $2A - B = 0$, prodit

$$0 = (2 - 1)\alpha + (2 - 2^{m:2})\beta x^m + (2 \cdot 2^{n:2})\gamma x^n + \&c.$$

At iam cum diſtantia x poſſit eſſe quaecunque, in hac ſerie erit variabilis, ut adeo omnes coefficientes ponendi ſint $= 0$. Quare faciendo

$(2 - 1)\alpha = 0$ erit $\alpha = 0$

$\beta(2 - 2^{m:2}) = 0$ erit $2 = 2^{m:2}$ adeoque $m = 2$.

$\gamma(2 - 2^{n:2}) = 0$ erit $2 = 2^{n:2}$ adeoque $n = 2$.

Cum ergo eodem modo omnes exponentes euadant $= 2$, erit

$$y = \beta x^2 + \gamma x^2 + \delta x^2 + \&c.$$

ſiue

siue

$$y = (\beta + \gamma + \delta + \&c,) x^2$$

Erit ergo manente claritate illuminationis, numerus candelarum ut quadratum distantiae.

§. 233. Haec quidem positio directe experimentis firmatur. Manente enim candela in K, quaerenda erit distantia, in qua duae, tres, pluresue candelae eandem producant illuminationem (§. 58.) & distantiae istae erunt ut radix quadrata numeri candelarum. At indirecte eam hic eruere libuit, ob methodum, qua usi sumus, quam ipsam ob caussam problemati paullisper adhuc immorabimur, quo

Fig. 25. distinctius euoluatur. Sit ergo in A paries vel charta vel planum quoduis illuminandum. In B, C, D, E, F &c. ponantur candelae 1, 2, 3, 4 &c. ita ut planum aeque illuminent. Ordinatae Bb, Cc, Dd &c. referant candelarum in quauis distantia numerum, atque ducta curua Abf quaerenda est aequatio eius indolem exprimens.

§. 234. Quaestionem hanc ad sequentem reduximus: *Inuenire curuam talem, ut ordinatae duplae respondeat abscissa, quae sit ad abscissam ordinatae simplae ut* 1 *ad* $\sqrt{2}$. Eiusmodi curuam parabolam esse neminem fugit, an vero sola sit, quae hac gaudeat proprietate, demonstrandum est. Hoc vero ipso constat problematis ante dati solutio. Dicta enim abscissa $= x$, ordinata $= y$, reperitur fore $y \backsim xx$.

§. 235. Ast vero iam disquirendum est, an haec sit indoles curuae A b f, qua exprimitur ratio inter distantiam & numerum candelarum. Quem in finem ita experimenta sumi posuimus,

mus, ut collocato in diſtantia qualibet quolibet candelarum numero, quae planum in A colluſtrent, quaeratur diſtantia ea, in qua ſi ponantur candelae numero duplo plures, eandem producant illuminationem. Hoc experimento quoties libuerit iterato, mutata nempe diſtantia, mutatoque candelarum numero, ſed ſeruata utriuſque numeri ratione, detegetur diſtantiae prioris ad poſteriorem ratio $= 1 : \sqrt{2}$. Quo modo lex iſta adeo patet uniuerſaliter, ut candelis in B, C, D &c. poſitis adplicari poſſit, ita ut ſi Bb ad C c fuerit $= 1 : 2$, ſit quoque AB : AC $= 1 : \sqrt{2}$. ſimilique modo AC : AE $= 1 : \sqrt{2}$. Quae adeo eſt conditio problematis (§. 234.) ad quod quaeſtionem propoſitam reduximus.

§. 236. Hactenus eam tantum explicauimus relationem, quae eſt inter diſtantiam candelarum earumque numerum, unde nil adhuc de claritate plani illuminati concludere licet. Hanc vero ut ingrediamur ſemitam, ponendum erit, claritatem cum a diſtantia tum a numero candelarum qualicunque modo pendere, ita ut poſitis ceteris circumſtantiis omnibus iiſdem, datae diſtantiae datoque candelarum numero, data vel definita reſpondeat illuminatio. Cum itaque pendeat a duabus variabilibus, dicta illuminatione $= \eta$, diſtantia reſpondens x, numero candelarum $= z$, efferri poterit η per ſeriem, cuius ſinguli termini quadruplicis huius ſint formae.

$$\eta = a + bz^m + \gamma x^n + \delta z^p x^q.$$

Quae ergo aequatio veluti functio eſt totius ſeriei.

§. 237.

§. 237. Ut iam definiantur exponentes & coefficientes, recordandum eſt (§. 229.) eandem eſſe illuminationem, quoties candelarum numerus fuerit ut quadratum diſtantiae. Quodſi igitur pro z ſubſtituatur xx, erit

$$\eta = \text{conſt.} = \alpha + \beta x^{2m} + \gamma x^{n} + \delta x^{2p+q}$$

Cum vero diſtantia x, ſeruata hac lege poſſit eſſe quaecunque, aequatio iſta conſtantem ipſius η valorem non praebebit, niſi fiat

$$m = n = 2p + q = o$$

hac enim ratione prodit

$$\eta = \alpha + \beta + \gamma + \delta$$

Haec vero conſtans pendet a claritate vel vi illuminante & magnitudine candelarum, ſiue quod eodem redit, ab illuminatione abſoluta.

§. 238. Subſtitutis ergo valoribus repertis in aequatione

$$\eta = \alpha + \beta z^{m} + \gamma x^{n} + \delta z^{p} x^{q}$$

habetur

$$\eta = \alpha + \beta + \gamma + \delta z^{p} x^{-2p}$$

At iam cum $z = o$, erit $\eta = o$, quare

$$\alpha + \beta + \gamma + o$$

Unde tandem fit

$$\eta = \delta z^{p} x^{-2p}$$

§. 239. Cum iam unicus hic, qui remanſit terminus, ſit functio infinitorum aliorum, ipſi ſimilium, generalius ponendum erit

$$\eta = a z^{m} x^{-2m} + b z^{n} x^{-2n} + c z^{p} x^{-2p} + \&c.$$

Hac ergo ratione ſeriem ſerierum, cuius functio erat aequatio §. 236, ad unicam ſeriem reducere licuit. Quae vero cum amplius reduci

duci non poſſit niſi alia in ſubſidium vocentur experimenta, eam interim paullo propius conſiderabimus.

§. 240. Statim enim obuium eſt, legem unicam (§. 229.) qua uſi ſumus, ipſi plane reducendae non ſufficere. Eo tamen reducta eſt, ut iam conſtet ratio inter exponentes, & ſinguli termini functiones ſint ipſius z & x plane ſimiles. Eadem ergo ratione directe pendet a numero candelarum, qua pendet reciproce a quadrato diſtantiae.

§. 241. Quodſi ergo aſſumi poſſet, illuminationem creſcere ſimpliciter ut numerus candelarum, omnes exponentes euaderent $= 1$. adeoque foret

$$\eta = (a + b + c + \&c.) z : xx$$

§. 242. Si omnes exponentes m, n, p &c. poni poſſent aequales, foret

$$\eta = A.z^{m} : x^{2m}$$

Ut adeo illuminatio creſceret ut poteſtas quaedam numeri candelarum, decreſceret vero ut quadratum huius poteſtatis ipſius diſtantiae.

§. 243. Quemadmodum ergo hinc patet nexus inter legem primam & ſecundam (§. 227. 228.) ita ulterius progrediemur, tertiam quoque, quae ſinum anguli incidentiae ſpectat, in calculum inducendo. Ad tertium itaque & quartum experimentum ſupra deſcriptum (§. 62. 63.) regrediendo, ex utraque abſque hypotheſium adminiculo liquido fluit: *eandem fore illuminationem, ubi ſinus anguli incidentiae fuerit directe ut quadratum diſtantiae, reciproce vero ut numerus candelarum.* Sit ergo ſinus incidentiae $= s$,

pro

pro claritate plani illuminati hanc eamque universalissimam habebimus formulam

$$\eta = A + Bz^{a} + Cx^{b} + Ds^{c} + Ez^{d}x^{e} + Fz^{f}s^{g} + Gx^{b}s^{i}$$
$$+ Hz^{k}x^{l}s^{m}.$$

quae functio est infinitarum serierum, quarum termini his sunt analogi. Definiendi iam veniunt huius formulae coefficientes & exponentes.

§. 244. Quod ut fiat, tenendum, claritatem fore constantem ubi fuerit

$$s = xx : z$$

siue

$$z = xx : s$$

Quo valore substituto, habetur

$$\eta.\text{Const} = A + Bx^{2a}s^{-a} + Cx^{b} + Ds^{c}Ex^{2d+e}s^{-d}$$
$$+ Fx^{2f}s^{g-f} + Gx^{b}s^{i} + Hx^{2k+l}s^{m-k}$$

At iam η constans esse debet siue x & s simul sint variabiles, siue alterutra sola. Posita ergo x variabili & s constante, singuli formulae termini constantes esse debent, quare erit

$$a = c = d = g = f = b = 2k + l = 0$$

Ponendo vero, manente x, fluere s, itidem erit

$$a = c = d = g - f = m - k = 0$$

unde ob

$$f = 0 \;\&\; d = 0$$

erit $\qquad g = e = 0.$

Quare his valoribus substitutis ob $k = m$, & $l = -2m$ erit

$$\eta = (A + B + C + D + E + F + G) + Hz^{m}s^{m}x^{-2m}$$

At

At iam η euanescere debet cum fuerit vel z, vel s, vel denique $\frac{1}{xx} = 0$. Unde erit

$$\eta = Hz^m s^m x^{-2m}$$

siue

$$\eta = H\left(\frac{zs}{xx}\right)^m$$

§. 245. Haec vero formula functio est seriei, cuius singuli termini sunt ut potestas quaelibet adhucdum indefinita, ipsius ($zs:xx.$) Ut adeo sit

$$\eta = a\left(\frac{zs}{xx}\right)^m + b\left(\frac{zs}{xx}\right)^n + c\left(\frac{zs}{xx}\right)^p + \&c.$$

§. 246. Ponamus iam terminos omnes primum sequentes fieri posse $= 0$, quod maximum esset compendium, erit

$$\eta = a\left(\frac{zs}{xx}\right)^m$$

Quodsi ergo claritas plani illuminati esset ut quadratum sinus incidentiae, patet fore $m = 2$, eadem itaque etiam esset ut quadratum numeri candelarum & reciproce in ratione quadruplicata distantiae. Accedit, quod in eadem hypothesi omnes termini seriei (§. 245.) erutae eundem habeant exponentem, sitque $m = n = p =$ &c. Etenim in functione (§.244.)

$$\eta = Hz^m s^m : x^{2m}$$

ponatur $n = ss$, patet fore

$$1 = H.z^m s^{m-2} : x^{2m} - \text{conſt.}$$

Ut adeo pro ſingulis terminis exponens debeat eſſe = 2.

§. 247. At vero iam, ſi unquam dubium de veritate legum Photometriae quid valuit, hic certe vel maxime fit euidens. Equidem in ſuperioribus demonſtrationem, qua euincunt Optices Scriptores omnes, *illuminationem decreſcere ut ſinus incidentiae* (§. 53.) ita dedimus,
Fig. 1. ut euidens fieret in planum A B non plures incidere radios, quam qui incidunt in planum A E, quod ad directionem radiorum eſt normale. At ſi dicendum quod res eſt, quodque pluribus ita videbitur, nimis propere hinc infertur, claritatem ſimpliciter ideo decreſcere, quia pauciores radii obliquius in idem planum incidunt, quam qui normaliter incidunt. Quid quod ſi obliquitatis ictus, quo planum A B feriunt radii incidentes, ratio quoque eſſet habenda? Simile certe quid de vi radiorum ſolarium calefaciente autumant quam plurimi. Quidni ergo & de vi illuminante? Hoc vero ſi eſſet, concludendum foret, eſſe quoque

$$n = z^2 s^2 : x^4$$

adeoque praeter omnem opinionem augeri claritatem ut quadratum numeri candelarum, minui vero reciproce ut biquadratum diſtantiae. Quod utique minime eſt veroſimile, quippe omnibus Mechanices principiis (§. 51.) contradicere videtur apertiſſime. Potius enim vi ſimplae addita dupla, tripla &c. deſtruitur

eius

eius quaedam pars, tantum abest ut in maiori adhuc ratione augeatur.

§. 248. Quodsi contra ea ponamus claritatem esse simpliciter reciproce ut distantia, tota series eruta abit in aequationem simplicissimam

$$\eta = \frac{\sqrt{(zs)}}{x}$$

Ut adeo illuminatio cresceret ut radix quadrata numeri candelarum & sinus anguli incidentiae. Intenderetur ergo radiorum oblique incidentium vis illuminans, ratione habita quantitatis minoris. Pauciores enim sunt ut sinus incidentiae s. Sed $(\sqrt{s}) : s > 1$.

§. 249. Quodsi vero statuatur esse $\eta \backsim z$ siue $\eta \backsim s$, siue denique $\eta \backsim 1 : xx$, quacunque harum utaris hypothesium, substituto valore assumto tota series (§. 245.)

$$\eta = a\left(\frac{zs}{xx}\right)^m + b\left(\frac{zs}{xx}\right)^n + c\left(\frac{zs}{xx}\right)^p + \&c.$$

ad unicum reducitur terminum

$$\eta = A\frac{zs}{xx}$$

Ut adeo hinc euidenter pateat, tres istas Photometriae leges (§. 227.) veras esse, simul ac una tantum earum vera sit. Ponamus v. gr. esse

$$\eta \backsim s$$

quo valore substituto erit

$$s = a\left(\frac{zs}{xx}\right)^m + b\left(\frac{zs}{xx}\right)^n + c\left(\frac{zs}{xx}\right)^p + \&c.$$

adeoque

$$1 = az^m s^{m-1} x^{-2m} + bz^n s^{n-1} x^{-2n} + \&c.$$

Positis iam z & x constantibus, s vero variabilem, patet nil ominus singulos seriei terminos debere esse constantes, adeoque ut hoc obtineat faciendum esse $m - 1 = 0$ siue $m = 1$. similiterque $n = 1$, $p = 1$, &c. Quare his valoribus substitutis prodit

$$\eta = a\frac{zs}{xx} + b\frac{zs}{xx} + c\frac{zs}{xx} + \&c.$$

siue simpliciter

$$\eta = \frac{Azs}{xx}$$

Idem eodem modo euincitur ponendo $\eta \backsim z$ siue $\eta \backsim 1 : xx$.

§. 250. Quicquid vero horum sit maxime probabile videtur, seriem erutam ad unicum reduci terminum, ut sit

$$\eta = A\left(\frac{zs}{xx}\right)^m$$

Quo vero assumto patet fore

$$\frac{zs}{xx} = (\eta : A)^{1:m}$$

Ut adeo, etiamsi m non esset $= 1$, eodem tamen uti liceret calculo, quo in superioribus usi sumus. Quoties enim duae vel plures claritates fuerint aequales, eas aequales esse utique hac ratione detegetur. Quodsi vero inaequales essent, hoc tantum intercederet discrimen, ut loco ipsarum claritatum, quas inter se comparatas putares, substituendae essent earum potestates $1 : m$. Idem simili modo obtinere

tinere, ſi tota retinenda ſit ſeries, me non monente facile intelligitur.

§. 251. Utcunque vero exponentem m ſtatuamus unitate maiorem vel minorem, ſemper quiddam aderit, quod vel communi experientiae aperte videtur contrarium. Cum enim claritas plani illuminati nil aliud ſit, quam quantitas luminis in datam ſuperficiem incidens, atque eodem modo claritas obiecti luminoſi viſa (§. 37.) aeſtimanda ſit ex quantitate luminis, quod per pupillam in retinam oculi incidit, ibique obiecti imaginem depingit, conſequens eſt, manente apertura pupillae eo clarius videri obiectum, quo denſius fuerit lumen per ſpatium pupillae in datum quoduis imaginis punctum incidens. Aucta iam obiecti magnitudine vel ſuperficie adparente, in eadem ratione augebitur quoque magnitudo vel area imaginis, ut adeo ſi lumen incidens in eadem quoque ratione augeatur, ſiue ſi ſit $m = 1$, utique claritas imaginis eadem maneat. Obiectum ergo ſi aeque ſit luminoſum aeque clarum videbitur independenter ab eius magnitudine adparente. Contra ea ſi ponatur $m = 2$, erit $\eta \backsim zz$. (§. 246.) adeoque duplicata obiecti magnitudine, quadruplicabitur luminis in oculum incidentis quantitas. Cum vero imaginis in retina ſpatium tantum duplicetur, conſequens eſt in idem imaginis punctum lumen incidere debere duplo denſius. Ut adeo claritas obiecti viſa eo maior ſiue intenſior eſſet, quo maior eſt eius magnitudo adparens. Quod utique videtur abſonum, quippe obiectum, manente pupillae apertura

aeque videmus clarum, siue ipsius totam intueamur superficiem, siue partem superficiei visui subducamus. Eodem modo hoc patet, si ponas $m = 3, 4$ &c. & opposita erit ratio, si statuatur $m = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ &c. quippe his casibus, aucta obiecti aeque luminosi superficie, minueretur eius claritas visa ut superficiei radix quadrata, cubica &c., ut posita superficie duplo maiore claritas esset $\sqrt[2]{\frac{1}{2}}$, $\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$ &c.

§. 252. Sumantur iam tres candelae aeque clarae, atque in diuersa a plano illuminando distantia ita ponantur, ut illuminatio proximae debita aequalis videatur alteri, quae utrique debetur remotiori. Distantia proximae vocetur $= x$, secundae $= \xi$, tertiae $= y$, sitque illuminatio ipsis debita η, $\grave{\eta}$, $\ddot{\eta}$. Erit ergo in formula generali (§. 244.) ob $z = s = 1$.

$$\eta = H : (xx)^m$$

$$\grave{\eta} = H : (\xi\xi)^m$$

$$\ddot{\eta} = H : (yy)^m$$

At iam experimentis dicto modo institutis detegitur fore $\grave{\eta} + \ddot{\eta} = \eta$, ubi fuerit

$$\frac{1}{yy} + \frac{1}{\zeta\zeta} = \frac{1}{xx}$$

quare hoc valore substituto prodit

$$\eta = \grave{\eta} + \ddot{\eta} = H\left[\frac{1}{yy} + \frac{1}{\xi\xi}\right]^m = H\left[\frac{1}{yy}\right]^m + H\left[\frac{1}{\xi\xi}\right]^m$$

adeoque

$$\left[\frac{1}{yy} + \frac{1}{\xi\xi}\right]^m = \left[\frac{1}{yy}\right]^m + \left[\frac{1}{\xi\xi}\right]^m$$

At

At cum in hac aequatione ξ & y variabiles sint, ista vera esse nequit, nisi fiat $m=1$. Quo facto, sequitur in genere fore (§. 249.)

$$\eta = zs : xx.$$

§. 253. Ut vero nil intentatum relinquamus, nodum adhuc in scirpo quaeramus. Dubitare enim omnino licebit, an summa claritatis utriusque candelae remotioris, cum utraque actu in plano illuminato iungitur, sit eadem, quae est summa utriusque, si quaeuis seorsim spectetur, siue an fieri possit

$$\dot{\eta}+\ddot{\eta}=\eta.$$

cum experimenta doceant, aequalem in utroque casu esse illuminationem? Quodsi non admittas, nequaquam facere licebit

$$H . x^{-2m} = H\left[\frac{1}{yy}\right]^m + H\left[\frac{1}{\xi\xi}\right]^m$$

sed ponendum

$$H:(xx)^m = H\left[\frac{1}{yy}+\frac{1}{\xi\xi}\right]^m$$

adeoque nec erit $\eta=\dot{\eta}+\ddot{\eta}$
sed

$$\frac{\eta}{H} = \left[(\dot{\eta}:H)^{1:m}+(\ddot{\eta}:H)^{1:m}\right]^m$$

An vero eo usque a via simplicissima recedat natura, ulterius perquirere, mihi quidem post iam prolata, vel maxime videtur superuacaneum. Diutius vero quam par est me his immoratum fuisse, si quis iudicet, hoc mihi perinde erit, cum data opera factum sit. Methodum, qua usus sum, pro demonstrando nexu, qui inter leges Photometriae adest, haud parum

rum contulisse iam initio monui (§. 226.) Huius enim methodi ope adeo arctum esse vidimus hunc nexum, ut qualibet istarum legum vel minimum alterata, ceterae quoque eadem ratione alterentur. (§. 247. 248.) Simulac enim ponas, crescere illuminationem ut quadratum sinus incidentiae, ponendum quoque erit, eam crescere ut quadratum numeri candelarum, decrescere vero reciproce ut biquadratum distantiae.

§. 254. A quarta lege, quae angulum emissionis spectat, animum abstraximus, cum a ceteris non pendeat, atque seorsim experimentis firmetur (§. 74. seqq.)

§. 255. Experimenta, quibus in praecedenti calculo usi sumus, ipsi interserere noluimus, cum aptior eis hic sit locus, ubi iam examinandum venit oculi iudicium, tradendaeque sunt cautelae, quibus occurrendum est oculi fallaciis. En ergo

EXEMPLA EXPERIMENTI II.

§. 256. In camera, cuius laquear & parietes infuscatis contabulatae erant asseribus ligneis, unica tantum ad fornacem relicta parte muri albissimi non obducti, quem referat recta $\beta\alpha$, e regione huius muri collocaui candelam in L, interposito assere ligneo in C, totum murum obumbrante. Porro in B tria posui specula, ita ut lumen candelae in β proiicerent, atque distantia $LB+B\beta$ pro singulis esset aequalis. Cumque anguli incidentiae a recto parum differrent, necessario tria spatia in β a speculis collustrata, aeque illuminata esse debuis-

Fig 26

debuiſſent. At cum aliquantulam obſeruarem claritatis differentiam, ſpecula iſta lumen non aequaliter reflectere collegi. Remoto ergo ſpeculo, qui veluti medium tenebat, cetera duo, obſcurius nempe & clarius in B & b ita poſui, ut lumen candelae in idem ſpatium in β proiicerent, eſſetque $Lb + b\beta = LB + B\beta$. Tertium ſpeculum in A collocaui, tentaminibus quaerendo diſtantiam AL ſiue $A\alpha$ talem, ut dum lumen candelae in α proiiceret, ſpatium α a ſolo hoc ſpeculo aeque colluſtraretur ac ſpatium β a duobus ſpeculis B,b. Quo facto dimenſus ſum diſtantias $A\alpha$, AL, $B\beta$, BL, in digitis & lineis pedis pariſini. Experimentum hoc quinquies iteraui, fuitque in

Experimento	I°	II°	III°	IV°	V°
	$''\ '''$	$''\ '''$	$''\ '''$	$''\ ''$	$''\ '''$
$LB =$	35,8	33,7	69,5	69,2	28,7½
$B\beta =$	64,11	86,1½	97,4	101,6	48,1
$LA =$	21,1	18,4	48,4	46,2	17,0
$A\alpha =$	50,1½	70,6½	71,9	73,5	36,7½

§. 257. Ut iam his experimentis oſtendamus, numerum candelarum eſſe ut quadrata diſtantiarum, tenendum eſt, candelarum vices hic ſuſtinere unius candelae L imagines, quae pone ſpecula erant in λ, l, adeoque diſtantias eſſe

$$\lambda\beta = \beta B + BL.$$
$$l\alpha = \alpha A + AL.$$

Quare in experimentis noſtris erat

$$\lambda\beta = 100{,}7 \text{ -- } 119{,}8\tfrac{1}{2} \text{ -- } 166{,}9 \text{ -- } 170{,}8 \text{ -- } 76{,}8\tfrac{1}{2}$$
$$l\alpha = 71{,}2\tfrac{1}{2} \text{ -- } 88{,}6\tfrac{1}{2} \text{ -- } 120{,}1 \text{ -- } 119{,}7 \text{ -- } 53{,}7\tfrac{1}{2}$$

§. 258. At vero in λ fuerunt duae imagines, in l vero unica, unde esse debet

$(\lambda\beta)^2 : (\alpha l)^2 = 2 : 1,$

siue $\lambda\beta : \alpha l = \sqrt{2} : 1 = 1 : \sqrt{\tfrac{1}{2}}$

Erat vero in Experimento

I° .... $\alpha l : \beta\lambda$ = 0,70795.
II° .... = 0,73933.
III° .... = 0,72083.
IV° .... = 0,70068.
V° .... = 0,69908.

Ex his medio sumto $\frac{\alpha}{\beta\lambda}$ = 0,71357.

Sed $\sqrt{\tfrac{1}{2}}$ .... = 0,70711

Quare differentia ..... = 0,00646

§. 259. Videmus ergo singula experimenta a ratione $1 : \sqrt{\tfrac{1}{2}}$ perparum differre. Maxima enim differentia, quae in secundo obvenit est = 0,03222, ut adeo partem trigesimam maioris distantiae $\beta\lambda$ non excedat. Erat vero ista distantia $= 119'', 8\tfrac{1}{2}'''$, quare differentia ista proxime est 4 digitorum, quibus minuenda fuisset distantia minor αl. Hoc vero obtinuisset, speculum A duobus digitis propius ad candelam admouendo. At hoc ipsum indicat aliam adfuisse causam, quippe distantiam speculi vel dimidio tantum digito remouendo, euidens deprehendere licuit claritatis decrementum. Quicquid vero causa erroris fuerit, nolui tamen experimentum supprimere, cum huiuscemodi plura non sumserim. Ceterum ratio experimenti infra explicabitur.

EX-

EXPERIMENTVM V.

§. 260. Collocata iterum candela in L & obiecto murum αϐ obumbrante in C, ſpeculum clarius poſui in B, obſcurius in b, & tertium, quod medium tenere dixi, in A, hoc modo, ut ſpecula B,b lumen candelae in idem ſpatium muri ϐ proiicerent, utque claritas muri in α candelae A debita aequalis videretnr claritati in B quae ab utraque candela B, b proueniebat. Quo facto dimenſus ſum diſtantias ſpeculorum a muro & candela. Experimentum quater inſtauraui, fuitque in Fig. 27.

	I°	II°	III°	IV°
	″ ‴	″ ‴	″ ‴	
AL =	20,0	26,9	31,1	44,10
Aα =	36,3	41,6	66,10	79, 2
bL =	25,6	32,0	41,3	62, 7
bϐ =	47,3	54,1	85,2	101,5
BL =	32,6	45,6	60,6	77, 2
Bϐ =	55,10	65,5	101,8	116,0

§. 261. At vero & hic ſumenda erit diſtantia imaginum Λ,l,λ, quae ergo erat

	″ ‴	″ ⁗	″ ″	
Λα =	56,3	68,3	97,11	124,0
lϐ =	72,9	86,1	126,5	164,0
λϐ =	88,4	110,11	162,2	193,2

§. 262. Cum in his experimentis inaequalis ſit imaginum diſtantia, debebit eſſe

$$\frac{1}{(\Lambda\alpha)^2} = \frac{1}{(l\beta)^2} + \frac{1}{(\lambda\beta)^2}$$

Quam formulam eleganter conſtruere likeet. *Diſtantia utriusque imaginis remotioris transferatur ex* ϐ *in* λ *&* l, *ut rectae* ϐλ, ϐl *ſint normales.* Fig. 28.

les. Ducta iam hypothenusa λl, *in eam demittatur perpendicularis* ϐΛ, *haecque erit distantia imaginis proximae* Λ. Etenim in omni triangulo perpendiculares sunt reciproce ut latera in quae demittuntur. At in triangulo rectangulo quadratum hypothenusae aequatur quadratis cathetorum iunctim sumtis, & catheti sibi invicem sunt perpendicularium loco. Dicta ergo area trianguli $= 1$, erit hypothenusa $\lambda l = 1 : \alpha\Lambda$, cathetus $\beta\lambda = 1 : \beta l$ & cathetus $\beta l = 1 : \beta\lambda$, adeoque

$$\frac{1}{(\alpha\Lambda)^2} = \frac{1}{(\beta l)^2} + \frac{1}{(\beta\lambda)^2}$$

Insuper dicta claritate candelae proximae debita $= l\lambda$.. erit claritas debita remotiori $= \lambda\Lambda$, & ea quae debetur remotissimae $= \Lambda l$. ut adeo sint in ratione segmentorum baseos ad totam basin trianguli rectanguli.

§. 263. At hic praestat calculus. Ut vero singula experimenta inuicem conferri possint, faciemus

$$1 = \left(\frac{\alpha\Lambda}{\beta l}\right)^2 + \left(\frac{\alpha\Lambda}{\beta\lambda}\right)^2$$

ut in singulis claritas in α per unitatem exprimatur. Calculo iam subducto, fuit in experimento

$(\alpha\Lambda:\beta l)^2 = 0{,}5978 -- 0{,}6286 -- 0{,}5986 -- 0{,}5717$
$(\alpha\Lambda:\beta\lambda)^2 = 0{,}4055 -- 0{,}3786 -- 0{,}3646 -- 0{,}4119$

Summa $= 1{,}0033 -- 1{,}0072 -- 0{,}9632 -- 0{,}9836.$

Ex

Ex quatuor his numeris medium ſumendo erit

$(\alpha\Lambda:\delta\lambda)^2 + (\alpha A:\delta l)^2 = 0,9898$

ſed deberet eſſe $= 1,0000$

unde differentia. $= 0,0102$

§. 264. Maxima differentia extat in tertio experimento, atque eſt $= 0,0368$. Reſpondet vero diſtantiae $\Lambda\alpha = 97'',11'''$, quae ergo $1'',10'''$ fuiſſet augenda, ſpeculum A undecim lineis a muro vel candela remouendo. Quare & hinc iterum patet, minutas quoque ab oculo diſcerni claritatum differentias. Error enim vel differentia, quae in quatuor his experimentis maxima eſt, vigeſimam ſeptimam partem totius claritatis non excedit, in experimento quarto parte ſexageſima minor eſt, in primo & ſecundo prorſus contemnenda.

EXPERIMENTVM VI.

§. 265. Recta BC referat murum album & maxime planum, cuius latitudo $= 2'$, altitudo $= 10'$. In L poſita ſit candela, cuius radii normaliter incidant in A, patet ex ſuperioribus, partes muri ſuperiores & inferiores minus fore illuminatas, in ratione directa ſinus incidentiae & reciproca duplicata diſtantiae (§. 48. 53.) ut adeo illuminatio in B ſit $= (\cos.BLA)^3 : AL^2$. Perparum ergo claritas ab A verſus B decreſcit, ut nulla *ſenſibilis* ſit eius differentia, ubi angulus BLA paucos gradus non excedit. Candela itaque in L collocata, poſitoque in D aſſere ligneo totam cameram pone

ne candelam obumbrante, 10 aut 12 pedd. a muro recessi, atque cum oculo nudo tum & lente concaua armato, murum intuens, quaesiui interuallum siue spatium BC, in quo nullam deprehendere valuit oculus claritatis differentiam, quae sensibilis esset. Quo facto metitus sum distantiam candelae LA, & altitudinem spatii CB, cuius dimidiam partem sumsi pro altitudine AB. Fuitque in Experimento

	″	″ ‴
I°- - - - AL	= 10.	AB = 3,3
II° - - - - -	= 20.	- - = 6,9
III° - - - - -	= 30.	- - = 11,0
IV° - - - -	= 40.	- - = 15,9
V° - - - - -	= 50.	- - = 21,6

§. 266. Etsi oculus inter claritates in B & A nullam inuenerit differentiam, nilominus utique sunt diuersae. Dicta enim claritate in A = 1, erit claritas in B = $(\text{cos}.BLA)^3$, adeoque utriusque differentia = $1-(\text{cos}.\ BLA)^3$, quae oculi in hoc experimento subterfugit aciem. Est vero in

Exp.	° ′		³	
I°	ang.BLA = 9:14	cos.BLA = 0,9616	differ. = 0,0384.	
II°	- - - - = 9:35	- - - - = 0,9587	- - - = 0,0413.	
III°	- - - = 10:23	- - - = 0,9517	- - - = 0,0483.	
IV°	- - - - = 11:8	- - - - = 0,9446	- - = 0,0554.	
V°	- - - - = 12:8	- - - - = 0,9345	- - = 0,0655.	

§. 267. Patet ergo hinc 1° differentias istas omnes exiguas esse, etsi forsan, ob difficultatem, cui obnoxia est utriusque claritatis comparatio, cunctae maiores sint, quam in aliis experimentis. 2°. Differentias istas crescere,

cre-

crescente distantia candelae, ut adeo non sint definita pars quota totius claritatis. Etenim in experimento primo differentia est = 0,0384 siue $\frac{1}{26}$ ipsius claritatis in A; At in quinto, cum candela esset quinquies remotior, fuit differentia = 0,0655 siue $\frac{1}{15}$ claritatis in A.

§. 268. Ut vero hos numeros ad eandem unitatem referamus, diuidendi sunt per quadrata distantiarum, quo facto erit pro

Distantia "	claritas in A	claritas in B	differentia
10	1,0000	0,9616	0,0384
20	0,2500	0,2397	0,0103
30	0,1111	0,1057	0,0054
40	0,0625	0,0590	0,0035
50	0,0400	0,0374	0,0026

Etsi ergo differentiae una cum claritatibus decrescant, non tamen id fit in eadem ratione. Claritates enim celerius decrescunt, quam differentiae. At probe notandum claritatem hanc esse veram non visam. Visa enim cum ab apertura pupillae pendeat, in ultimis experimentis maior fuit, quam in primis, ob maiorem pupillae aperturam. Quae si in singulis experimentis statuatur differentiis, quas exhibuimus in § 266, proportionalis, in eadem ratione augenda erit claritas in A & B, ut ea quae vera est, in visam commutetur. Ab hac enim pendet oculi iudicium. Quare fuit in

experimento	claritas visa in A	claritas visa in B	differentia.
I°	1,0000	0,9616	0,0384.
II°	0,2688	0,2578	0,0110.
III°	0,1398	0,1330	0,0068.
IV°	0,0902	0,0852	0,0050.
V°	0,0682	0,0638	0,0044.

§. 269. Differentiae hae ſunt errorum, qui in oculi iudicium irrepere poſſunt, veluti limites extremi, quos aut nunquam aut rariſſime excedet. Etenim in hoc experimento claritas ab A verſus B & C adeo inſenſibiliter decreſcit, ut difficillime determinetur, ubinam differentia euadat ſenſibilis. Unde in ſumendis experimentis iam deſcriptis altitudinem AB debito potius maiorem quam minorem definitam eſſe, tuto aſſumere licebit.

§. 270. Ex ultima tabella (§. 268.) euidens eſt, claritatem celerius decreſcere quam vero decreſcit error, qui in diiudicanda claritate committi poteſt. Etſi ergo errorin ſe ſpectatus maior ſit, ubi claritas viſa maior eſt, attamen ſi ad claritatem ipſam referatur, minorem eius conſtituet partem. Sic v. gr. error in primo experimento = 0,0384 vel nouies maior eſt errore quinti experimenti; ille tamen tantum ad partem $\frac{1}{26}$, hic contra ad partem $\frac{1}{15}$ claritatis, ad quam ſpectat, aſcendit. Neque dubitandum, errorem ſiue eius ad claritatem rationem notabiliorem euadere poſſe, ubi claritas minor fuerit ea, quae debetur diſtantiae candelae 50 digitorum. Immo concipere licebit claritatem adeo paruam, ut eam cum ab-

abſolutis tenebris confundat oculus, etſi, quod iam ſupra monuimus, & his paullatim aſſueſcat.

§. 271. Cum itaque oculus claritates parte vigeſima, vel decima vel magis adhuc inter ſe diſcrepantes, plurimis caſibus confundat, eatenus incertum erit eius de aequalitate claritatum iudicium, quatenus claritates, quas aequales eſſe ſtatuit, inter ſe diuerſae eſſe poſſunt. Huic ergo dubio mederi conuenit, quantum quidem eius fieri poteſt. Quem in finem ſequentia praenotaſſe iuuabit.

§. 272. *Si experimenta ſumantur eam tantum ob cauſſam, ut lex quaedam vel ex principiis vel ex aliis experimentis deducta firmetur, qualia ſunt ea, quae ſupra deſcripſimus* (§. 58. 59. 62. 63. 256. 260.) *his caſibus oſtendiſſe ut plurimum ſufficiet, experimentorum a lege diſcrepantiam incertitudinem indicii oculi non ſuperare, adeoque eam intra limites contineri intra quos vagatur oculi ſententia.* Sic v. gr. in exemplis experimenti ſecundi (§. 259.) vidimus errorem maximum fuiſſe partem diſtantiae trigeſimam, adeoque partem claritatis quindecimam, ut adeo, cum diſtantia minor fuerit $= 88'' 6\frac{1}{2}'''$, intra praefinitos limites (§. 270.) contineatur. In experimento Vto. error maximus erat $= 0{,}0368$ ſiue pars $\frac{1}{27}$ claritatis (§. 264.) cum ergo diſtantia candelae vel imaginis proximae eſſet $= 97'', 11'''$, errorem admittere adhuc licuiſſet parte $\frac{1}{15}$ claritatis maiorem (§. 270.) ut adeo cum error $= 0{,}0368$ ſit fere duplo minor, duplo fere ſit tolerabilior.

§. 273. *Si idem experimentum, variatis circumſtantiis, pluries iteretur, atque error pro ratione cir-*

cumſtantiarum vel maior euadat vel minor, aut de veritate legis eiusque uniuerſalitate eſt dubitandum, aut ſuſpicanda erit lex quaedam ſpecialis, a circumſtantiis iſtis pendens. Ita v. gr. in experimento VI. differentias creſcere vidimus creſcente candelae diſtantia (§. 266.) Eas ergo perperam confudiſſes.

§. 274. *Si iterato experimento aberrationes a lege, quam ſtabilire propoſitum eſt, indifferenter mox ſint poſitiuae mox negatiuae atque contineantur intra praefinitos limites* (§. 270.) *de veritate legis eiusque univerſalitate dubitare amplius haud licebit.* Oculus enim claritates parum ab inuicem diſcrepantes aequales eſſe iudicat, ſiue prior, ſiue poſterior maior fuerit. Huiusce modi deprehendes eſſe differentias inter numeros §. 258. §. 263.

§. 275. *Quodſi denique aberrationes poſitiuas negatiuis deprehendas eſſe notabiliter maiores vel minores, aut ſtatuendum erit, legem ſtabiliendam in minutiis a vero recedere, aut defectui inſtrumentorum anomalia iſta erit tribuenda.* Sic in experimentis (§. 256. ſeqq.) differentias diſtantiarum poſitiuas negatiuis inuenies eſſe maiores, quod claritatem ſpeculis remotioribus debitam minorem reddit ac eſſe debuiſſet, idemque in experimento Vto (§. 260. 263.) deprehendes, ut adeo cum in ſingulis eadem adhibita fuerint ſpecula, eodemque ordine collocata, hanc aberrationem diuerſae ſpeculorum vi reflectenti adſcribere tuto liceat. Mederi quidem potuiſſet huic defectui, vel ſpecula mutando, vel errorem definiendo, at in hiſce minutiis diutius perſcrutandis tempus terere non duxi operae pretium eſſe.

§. 276.

§. 276. Maioris momenti eſt aberrationum iſtarum examen, ubi in dato quodam caſu ſpeciali determinanda venit obiecti cuiusdam claritas, aut vis reflectens, ut ſunt albedo chartae, muri, gypſi &c. claritas ſingulorum obiectorum eidem lumini expoſitorum &c. Nimis enim hae quantitates ſunt ſpeciales & indiuiduae, quam ut legibus uniuerſalibus ſubiici, iisque definiri poſſint. Unde non modo exactiſſima ſumenda & ſeligenda ſunt experimenta, verum & minuendus eſt error, cui obnoxium eſſe poteſt oculi iudicium.

§. 277. Cum aberrationes poſitiuae & negatiuae aeque ſint *poſſibiles* (§. 276.) conſequens eſt, aeque quoque eas fore *frequentes*, ſi experimentum pluries iteretur. Quoties ergo utrinque eaedem occurrent aberrationes, patet eas ſeſe mutuo fore deſtructuras, ut adeo dudum iam inualuerit mos *ex cunctis terminis eum ſumendi, qui arithmetice medius eſt*. Sumendus eſt *geometrice medius*, ſi inter *rationes* erroneas quaeratur ea, quae ad veritatem omnium maxime accedit. At ſi quantitates vel rationes erroneae parum ab inuicem differant, utrumque medium fere concidit.

§. 278. *Quandoque ejusmodi medium ſumitur inter duas quantitates quarum altera manifeſto maior, altera minor eſt quaeſita, neque conſtet quantum haec ab utraque extrema diſtet.* Sic ſtatuerunt peripheriam circuli proxime medium tenere inter poligonum circumſcriptum & inſcriptum plurimorum laterum. At longe exactius determinabitur, aſſumendo peripheriam a circum-

ſcripto duplo plus diſtare quam ab inſcripto. Huiusmodi caſus infra occurrent.

§. 279. *Quodſi idem experimentum infinities ponatur repetitum, medium inter omnia a vero plane non differre ſtatuere omni iure licet.* Abſtrahitur hic a defectu inſtrumentorum, alias enim non eam inuenies quantitatem, quae quaeritur, ſed eam, quae defectui iſti vel aliis circumſtantiis ſimul debetur.

§. 280. Cum vero nullum experimentum infinities repetatur, diſpiciendum erit, quid ex finito eorum numero deduci poſſit. Hoc certe caſu haud quaquam ſtatuere tuto licebit, aberrationes poſitiuas & negatiuas aequales in experimento aeque fuiſſe frequentes. Hoc enim ſi eſſet, quantitas ex cunctis media vera quoque foret. Sit enim quantitas vera $=Q$, aberrationes ſint $+a$, $+b$, $+c$ &c. earum frequentia ſeu vices, m, n, p, &c. erit earum

numerus $= 2m + 2p + 2q + \&c.$

ſumma $= (Q+a)m + (Q+b)n + (Q+c)p \&c.$
$+ (Q-a)m + \&c.$

adeoque

$$\text{media} = \frac{(Q+a+Q-a)m + (Q+b+Q-b)n + \&c.}{2m+2n+\&c.} = Q$$

§. 281. At de hac conditione, quae exoptata eſſet, nunquam certus eſſe poteris. Eo tamen magis ad eam accedes, quo pluries repetatur experimentum. Cuius effati abſolutiſſimam demonſtrationem dedit cel. IAC. BERNOVLLI in *Arte coniectandi P. IV.* Per ſe enim patet totum hoc negotium ad *probabilitatem* reduci. Hanc ut diligentius rimemur, de errorum frequentia quaedam praemittenda ſunt.

§. 282.

§. 282. Triplicis vero eos esse generis facile patet. Prioris sunt illi, qui debentur *vago oculi iudicio* (§. 269. 270.) quique adeo caueri nequeunt. Secundi generis sunt ii, qui debentur *obseruatoris incuriae*, qui etsi ipso *Argo* sit oculatior, nunquam tamen aeque vigilare valet. Tertii denique generis ii sunt, qui ab *instrumentis aliisque circumstantiis* pendent, obseruatori non imputandi. Ab his animum abstrahimus (§. 275.) Aut enim iis mederi dabitur, aut seorsim determinandus erit defectus. Quorum alterutrum nisi fieri possit, frustra experimento quantitatem quaesitam exacte definire conaberis.

§. 283. Errores ab incuria pendentes inter definitos continentur terminos, quos excedere nequis, nisi data opera errare velis. Hoc vero cum fieret, simul ac data opera incurius esses, consequens est, ut eo rariores sint erores, quo sunt grauiores. Idem certe & in vita communi & in legibus de culpa plus minusue graui statuitur. Idem vero quoque valere de errore, qui pendet ab oculi iudico, facile euincitur.

§. 284. Sint duae claritates, quas oculus aequales esse iudicet, patet inter utramque adesse posse differentiam, certis tamen limitibus circumscriptam (§ 270.) Ponamus iam differentiam hanc esse maximam, sitque claritas altera $=$ AB, differentia maxima BC, consequens est claritatem alteram fore $=$ AB $+$ BC $=$ AC $=$ DF. Contra ea si haec sit minor, exprimetur per DE, quo casu prior erit $=$ AC. At iam cum incertum sit, quanta dif- Fig. 30.

 feren-

ferentia reuera adſit, patet puncta B,C eſſe limites prioris, E,F vero poſterioris.

§ 285. Ponamus claritatem minorem eſſe $= AB = DE$, differentiam $= FG$, ut maior ſit $= ED$. Quodſi vero iam utraque ſucceſſiue augeatur usque dum maior euadat $= DF$, minor $= AH$, amplius augeri non poterunt, quin ſimul alteretur ſenſatio, quippe claritas extra praefinitos limites euagaretur. At ſingula augmenta, quae capit a G ad F totidem ſunt caſus, qui manente oculi iudicio obtinere aeque facile poſſunt, *Unde eo frequentior erit aberratio EG quo maior eſt eius ad aberrationem maximam EF complementum* GF. Idem valet de aberrationibus negatiuis, quae occurrent, cum claritas A maior fuerit claritate B.

§. 286. Cum ergo aberationes eo frequentius occurrant, quo minores ſunt, conſequens eſt, *in dato quouis caſu eas quantitates quae iterato experimento frequentiores ſunt, quantitati mediae ſiue verae quoque eſſe propiores.* Hoc certe ſi non admittas ab ea probabilitate, quae *maxima* eſt recedis, ipſique minorem ſubſtituis. Etſi enim poſſibiles quoque ſint caſus, qui a norma hac aberrant, attamen longe iſti ſunt rariores, ut pluries repetito experimento eorum poſſibilitas continuo minuatur ſenſimque euaneſcat.

§. 287. Sit iam experimentorum ſumtorum numerus $= N$, quantitas quaeſita vera $= Q$, aberrationes a, b, c, d, &c. ... m, n. quibus ſingulis praefigemus, ſignum $+$, cum infini-

finitis modis variari possit, sit denique quantitas ex cunctis media $= M$, erit

$$M = Q + \frac{a+b+c+\ldots+m+n}{N}$$

§. 288. Ponamus iam aberrationes istas ita esse comparatas, ut ultima n neglecta ceterae sese destruant, erit

$$M = Q + \frac{n}{N}$$

ut adeo decrescat aberratio media in ratione numeri experimentorum, adeoque ut ordinatae hyperbolae intra asymtotos. Eo ergo lentius decrescit, quo maior iam est numerus obseruationum. Hunc enim unitate augendo erit aberratio $= \frac{n}{N+1}$, quae a prima differt parte $\frac{n}{N} - \frac{n}{N+1} = \frac{n}{NN+N}$. Ut adeo pateat, *unicum errorem magis notabilem quantitatem mediam diu turbare, nisi aucto experimentorum numero accedat alius aeque notabilis sed negatiuus, qui ergo priorem destruat.*

§. 289. Casus hic aut similis saepius obvenit, maxime vero ubi experimentorum numerus haud fuerit ingens. Cum enim frequentiores sint aberrationes minores a, b, c, d &c. hae si forte fortuna solae adfuerint aut proxime sese destruent, aut saltem medium dabunt a vero parum discrepans. Raro accedit aberratio maior, rarius vero eiusmodi duae, quae sese destruant.

§. 290. Quicquid vero horum obueniat actu, pessimum assumendo patet (§. 288.) aberrationem $\frac{n}{N}$ siue quantitatem erutam $M = Q + \frac{n}{N}$ longe minorem esse quantitate $Q + n$, quam dat experimentum *Ntum*, si haec sola spectetur. Quare utique pluribus experimentis collectis, sumtoque medio ad veram quantitatem propius acceditur.

§. 291. Quodsi eiusmodi aberratio, quae ceteras longe excedit, sola occurat datur hinc methodus eam cognoscendi. Sumendae nempe sunt differentiae inter mediam ex omnibus deductam M & obseruatas $Q+a, Q+b, \&c. Q+n$. Sit iam differentiae $Q+n-M$ ceteris notabiliter maior, dico quantitatem $Q+n$ a vera Q omnium maxime distare, atque hac reiecta, quantitatem ex ceteris mediam

$$M = \frac{Q+a+Q+b+\&c. \ldots\ldots +Q+m}{N-1}$$

siue

$$M = Q + \frac{a+b+c+\ldots\ldots+m}{N-1}$$

a quantitate vera Q minus differre, quam

$$M = Q + \frac{a+b+c+\&c.+m+n}{N}$$

Cum enim singulae aberrationes $a, b, c \ldots m$ sint minores quam n, erit quoque

$$\frac{a+b+c+\ldots\ldots+m}{N-1} < n$$

etiamsi

etiamsi omnes sumantur positiuae. Dicta iam summa

$$a+b+c+\ldots\ldots+m=A$$

erit

$$\frac{A}{N-1} < n$$

adeoque

$$A < Nn-n$$

unde

$$0 < Nn-n-A$$

addatur utrinque AN, erit quoque

$$AN < AN+nN-n-A$$

adeoque

$$AN < (N-1).(A+n)$$

Unde

$$\frac{A}{N-1} < \frac{A+n}{N}$$

Minor ergo est aberratio media eo casu, quo experimentum *Ntum* omittitur, unde ad quantitatem veram eo propius accedes, quo plures aberrationum $a, b, c, d,$ &c. sese destruent.

§. 292. Secus vero res se habebit, ubi differentiae vel aberrationes a, b, c, d &c. omnes sint positiuae, sola aberratione n excepta quae negatiua sit, aut viciſſim. At adeo parua est huius casus probabilitas, ut ubicunque notabilis sit experimentorum numerus, ceu *mortaliter impoſſibilis* statui poſſit.

§. 293. Ut iam dicta exemplo illuſtremus, ſequentes ſupra (§. 258.) ex quinque experimentis eruimus quantitates.

I°. - - - - $\alpha l : \beta\lambda$ = 0,70795
II°. - - - - - - - - = 0,73933
III°. - - - - - - - - = 0,72083
IV°. - - - - - - - = 0,70068
V°. - - - - - - - - = 0,69908

Ex his deduximus mediam = 0,71357

Quare differentia ſumta, erat

I[a] - - - - - = − 0,00562
II[a] - - - - - = + 0,02576
III[a] - - - - = + 0,00726
IIII[a] - - - - = − 0,01289
V[a] - - - - = − 0,01449

Cum ergo differentia ſecunda ceteras omnes ſatis notabiliter excedat, reiecto experimento ſecundo, cuius quippe error non compenſatur erit pro

I°. - - - - $\alpha l : \beta\lambda$ = 0,70795
III° - - - - - - - - = 0,72083
IV°. - - - - - - - = 0,70068
V°. - - - - - - - - = 0,69908

Summa = 2,82854

Hinc media - - - $\alpha l : \beta\lambda$ = 0,70713
At deberet eſſe = $\sqrt{\frac{1}{2}}$ = 0,70711
differt adeo - - - = 0,00002

Etſi

Etsi vero haec differentia plane sit contemnenda, frustra tamen affectaretur triumphus, quippe fortuito id accidit. Potuisset enim differentia haec vel centies maior esse, semper tamen minor fuisset ea, quam retento experimento secundo, supra inuenimus. Ceterum cum nimis paruus sit experimentorum numerus, hoc exemplum potius adduximus, ut methodus ista quodammodo illustraretur, quam ut quantitas vera determinaretur (§. 272. 275. 256.)

§. 294. Quodsi ita comparatae sint aberrationes singulorum experimentorum, ut hac methodo tuto uti nequeas, nihilominus tamen alium in finem adhiberi poterit. Sumta enim ex cunctis quantitatibus media, utique dubium erit, an ista cum vera, quae quaerebatur, coincidat nec ne? Omittatur ergo experimentum, quod maxime aberrat a medio inuento, atque hoc facto iterum quaeratur medium. Hoc a priore subtracto, utriusque differentia proxime indicabit, quousque dubium est medium ex omnibus inuentum. Ita v. gr. ut eodem exemplo utamur distantia ex quinque experimentis media erat $=$ 0,71357 (§. 258.) reiecto vero secundo (§. 293.) eandem inuenimus esse $=$ 0,70713, quare utriusque differentia est $=$ 0,00644, qua quantitate media eruta 0,71357 vel maior vel minor esse potest. Proxime enim differentiam istam ceu limites aberrationis spectare licebit, ut maxime probabile sit, mediam quantitatem inuentam eos non excedere. Adeoque concludere inde licet distantiam mediam 0,71357 parte

parte sua $\frac{0,00644}{0,71257} = \frac{1}{111}$ a vera haud discrepare, eatenus ergo eam esse exactam, quatenus partem $\frac{1}{111}$ vilipendere licebit.

§. 295. Cum in singulis Photometriae experimentis, ut & in infinitis aliis, aberrationes non aeque sint frequentes, alia datur methodus ex finito earum numero quantitatem mediam ita determinandi, ut maxime probabile sit, eam a vera omnium minime discrepare. Jam enim vidimus, rem omnem ad probabilitatem maximam esse perducendam, cum certitudinem omnibus numeris absolutam assequi non detur. Expedit ergo methodum istam uniuersalius exponere.

Fig. 31. §. 296. Sit quantitas vera experimentis determinanda A C, aberrationes utrinque maximae sint C B, C D. Ceterarum aberrationum CQ, CP, CR, CS frequentiam seu *vices* referant ordinatae QM, PN, RL, SK curuae BMLD, quas vocabimus *vices* absolutas seu *veras*, ut ab *obseruatis* distinguantur. Patet vero has cum illis coincidere debere, experimento infinities iterato. At cùm hoc numquam fiat, dispiciendum quid pro finito experimentorum numero sanciendum sit.

§. 297. Primo quidem facile perspicitur, *si vices cuiusque aberrationis obseruatae veris PN, QM, RL, SK &c. sint proportionales utique inde innotescere quantitatem veram AC.* Curua enim super axin ACD cis citra erit remouenda, usque dum vices obseruatae per veras diuisae

eos-

eosdem exhibeant quotientes. Hoc vero cum rariſſime accidat, hoc medio uti non licet.

§. 298. Porro non minus obuium eſt, *ob datas punctorum P, Q, R, S ab inuicem diſtantias, vel unius eorum Q a puncto C data diſtantia CQ, ſiue aberratione vera, dari quoque ceterorum aberrationes veras CP, CR, CS.* Ut adeo ad unicam quaeſitam reducatur problema propoſitum.

§. 299. Ponamus iam quantitates AP, AQ, AR, AS obſeruatas fuiſſe n, m, l, k vicies, quaeruntur caſus omnes poſſibiles, quibus hoc fieri potuit. Quod ut inueniatur ex theoria combinationum & permutationum ſequentes mutuabimus poſitiones.

I°. *Si numerus obſeruationum factarum ſit N, atque quaeuis earum ſemel tantum occurrat, numerus caſuum poſſibilium erit idem ac numerus permutationum, adeoque* $= 1.2.3.4.5 \ldots\ldots N.$

II°. *Si obſeruatio quaedam pluries, v. gr. p vicies occurrat, perinde erit, quaenam ſit prior, quaenam poſterior, adeoque numerus caſuum poſſibilium minuetur, eritque*

$$= \frac{1.2.3.4.5 \ldots\ldots N}{1.2.3.4.5 \ldots\ldots p}$$

Utraque haec poſitio obtinet, ubi omnes obſeruationes aeque ſunt poſſibiles.

III°. *Si una vel plures obſeruationes ceteris magis ſunt poſſibiles, quaeuis tamen ſemel tantum occurrat, multiplicandus erit numerus caſuum* $1.2.3 \ldots N$ *per exponentes poſſibilitatum, ſiue per vices veras.*

IV°. *Si denique diuerſa ſit poſſibilitas, atque obſeruationum quaedam pluries occurrant, numerus per poſitionem ſecundam inuentus multiplicandus eſt*

per

per vices veras ad eas potestates euectas, quae vicibus obseruatis respondent.

§. 300. Haec iam facile ad quaestionem propositam adplicantur. Est enim numerus obseruationum $= m + n + k + l$.
vices obseruatae sunt n, m, l, k.
Vices verae autem sunt PN, QM, RL, SK
dicto ergo numero casuum possibilium $= N$, erit

$$N = \frac{[1.2.3.4 \ldots (n+m+l+k)] PN^n . QM^m . RL^l . SK^k}{(1.2.3 \ldots n).(1.2.3 \ldots m).(1.2.3 \ldots l).(1.2.3 \ldots k)}$$

Manente vicium obseruatarum n, m, l, k, numero, constans erit coefficiens, qui ex permutationibus prouenit, unde erit

$$N \backsim PN^n . QM^m . RL^l . SK^k .$$

Adeoque numerus casuum possibilium erit factum ex vicibus veris ad potentias eas euectis, quae vicibus obseruatis sunt aequales.

§. 301. Quodsi iam daretur aberratio vera CQ, darentur quoque CP, CR, CS, adeoque & vices verae PN, QM, RL, SK, quippe curua BMD hic ceu data supponitur. Unde simul daretur numerus casuum possibilium. At cum probabilitate hic contenti esse iubeamur, aliam oportet ingredi viam.

§. 302. Aberratio CQ statuatur variabilis, eaque aucta vel imminuta, aberrationes CP, CR, CS quoque augebuntur & minuentur, cum constans sit punctorum P, Q, R, S ab inuicem distantia. Quare mutabuntur quoque ordinatae seu vices verae PN, QM, RL, SK, adeoque & numerus casuum possibilium N.

§. 303.

§. 303. Cum vero iam in genere iste casus maxime sit probabilis, qui omnium frequentissime occurrit, consequens est, debere esse

$$PN^n . QM^m . RL^l . RK^k = \text{numero maximo.}$$

Etenim haec quantitas est in ratione numeri casuum possibilium, adeoque eo facilius & frequentius occurret, quo magis hic numerus numeros ceterorum casuum excedit. Hanc vero ipsam ob caussam, cum maxima quaeratur possibilitas, omnium iste numerus maximus esse debet.

§. 304. Erit ergo &

$$n \log PN + m \log . QM + l . \log RL + k \log SK = \text{max.}$$

quare differentiando

$$0 = \frac{n.d(PN)}{PN} + \frac{md(QM)}{QM} + \frac{l.d(RL)}{RL} + \frac{kd(SK)}{SK}$$

Ad puncta H, M, L, K ductae concipiantur tangentes, sintque subtangentes γ, μ, λ, $\varkappa$, probabilitas erit maxima ubi fuerit

$$\frac{n}{\nu} + \frac{m}{\mu} + \frac{l}{\lambda} + \frac{k}{\varkappa} = 0$$

in qua formula subtangentes sunt positiuae aut negatiuae prout aberrationes, quibus respondent, positiuae vel negatiuae fuerint.

§. 305. Si curua BMLD ex utraque parte centri C fuerit similis, quantitas media AC hac ratione inuenta saepius cum quantitate arithmetice media, de qua in antecedentibus nobis sermo fuit, coincidit. Sic v. gr si duae tantum sumtae fuerint obseruationes AQ, AR, erit m = l = 1, adeoque

$$0 = \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu}$$

unde

unde

$$\lambda = \mu$$

quod esse nequit nisi punctum C a punctis Q, R aeque distet, at eo ipso euadit

$$AC = \frac{AQ + AR}{2}$$

ut adeo AC sit arithmetice media inter AQ & AR.

§. 306. Similiter hoc patet, ubi quatuor sumta fuerint experimenta, atque distantiae PQ & RS fuerint aequales. Etenim hoc casu punctum C a punctis Q, R vel P, S aeque distabit. Idem obtinet ubi tria sumta fuerint experimenta, quorum extrema a medio aeque differunt. Medium enim cum centro C coincidet. Ceterum vel per se patet hanc methodum elegantem potius quam commodam esse, cum ad prolixiores ducat calculos. Hinc ipsi fusius perscrutando non immorabimur, praesertim cum quantitas media hac ratione inventa, ab ea, quae arithmetice media est, utplurimum fere non differat.

§. 307. Maximae experimentorum aberrationes utique obseruatoris incuriae debentur, iuuabit ergo eas hic in medium proferre cautelas, quibus uti conuenit, ut quantum in viribus situm est, euitare eas liceat. Quod vero inter primaria impedimenta referri debet, quodque omnibus sensationibus commune esse merito videtur, est *affectuum in sensus imperium*. His certe turbatus plus saepe inuenis quam adest, siue ut rectius loquar, plus adesse, quam adest te reperire credis. Huic

iam

iam vitio ut obuíam ire liceat, cauendum eſt, *ut nulla capiatur rectarum vel angulorum menſura, quin prius tentando utramque claritatem comparandam aequalem eſſe aut oculo videri deprebenderis. Caue porro rectas iſtas aut angulos ex poſt mutes, cum forte eos opinioni, quam foues haud ſatis reſpondere inuenies.* Is ergo ſervandus eſt ordo, quem in experimentis ſupra traditis veluti exemplis docuimus.

§. 308. Facilior erit comparatio, ubi utraque claritas aeque eſt albida, aeque flaueſcens, aeque liuida &c. *At vero his caſibus vel maxime dubitandum, reuera aequalem eſſe utramque claritatem, quoties comparatio tibi faceſſit negotium ut diu utramque intueri veluti cogaris, antequam de aequalitate quicquam ſtatuere te poſſe deprehendas.* Quodſi enim reuera aequalis fuerit utraque claritas, aequalitas iſta adeo manifeſto in oculos incurrit, ipſisque ita ſe probat, ut dubium ſuperſit plane nullum. Sic in experimentis ſupra deſcriptis (§. 256 260.) ſpatia a ſpeculis illuminata ita aeque clara videri debent, quaſi idem lumen per duo foramina murum colluſtraret. Quoties vero dubius haereas, oculuſque iudicium ferre primo iteratoque intuitu recuſet, fallaciam ſubeſſe tuto concludes, & ſpeculorum diſtantiam mutare e re erit tua.

§. 309. Aegre comparantur claritates, quae colore plus minuſue differunt. Sic albedo chartae, quam luna colluſtrat, lacteo gaudet colore, lumini candelae expoſita flaueſcit. Huic incommodo quandoque mederi licet, ſi chartae albae ſubſtituatur alia eo colore illita, qui diſparitatem iſtam tollat. *Saepius quoque*

alterutra claritas data opera est augenda vel minuenda, ut apertissime eam altera esse maiorem vel minorem videas. Hoc enim modo simul dignosces, *quanam in re consistat differentia a diuerso claritatis utriusque colore pendens. Hanc postea ita minuere paullatim licebit, ut ad sensum plane euanescat.* Exempla, quae huc faciunt, infra occurrent.

§. 310. Cum porro oculus claritatibus diversissimis successiue assuefiat, ab uno extremo ad alterum veluti per saltum transire haud licet, atque exspectandum erit, usque dum apertura pupillae ea sit, quae claritati propositae conuenit, atque fibrillarum motus tremulus, qui paullatim cuilibet claritati sese accommodat, in *statum permanentiae* peruenerit. Potius vero densissimas oculus sufferre valet tenebras, quam nimium splendorem, qualis est splendor solis, ut adeo ceteris paribus minus turbetur oculi iudicium, ubi claritas splendore isto est inferior.

§. 311. Antequam instituatur experimentum, probe eius ponderandae sunt *conditiones.* Quare *arcendum omne lumen alienum, quantum in potestate est, & si arceri omne nequeat, danda est opera, ut utraque claritas comparanda aeque ab eo augeatur.* Hoc enim salua manet aequalitas. *Si plures adhibendae sint candelae, merito istarum aequalem claritatem suspectam iudices, cum nimis sit variabilis.* Hinc in experimentis supra prolatis speculis uti maluimus, quam pluribus candelis. Quantumuis enim variabilis sit candelae adhibitae claritas, omnes eius imagines eodem modo clariores & obscuriores euaserunt, & salua fuit inter vires illuminantes *ratio*, quae in

in iſtis experimentis utramque facit paginam. Diuerſam quoque ſpeculorum vim reflectentem ante experimentum inſtitutum explorare ſeorſim oportuit, ut & haec impleretur conditio (§. 256. 275.) Eandem ob cauſſam *longe tutius immutabis unius candelae diſtantiam vel angulum incidentiae, quam numerum candelarum.*

§. 312. *Si, quod plura requirunt experimenta infra adferenda, eiusdem candelae vis illuminans a parte antica & poſtica comparanda eſt, eo felicius ſuccedit experimentum, quo propius candelae flamma ad figuram conicam accedit.* Ad hanc ergo conditionem vel maxime erit attendendum, ſi grauem incuriam vitare volueris.

§. 313. *Specula denique vel vitra, quae adhibentur, omni cura abſtergenda eſſe, per ſe euidens eſt,* cum vel minimi puluiſculi lumen intercipiant, eiuſque adeo denſitatem, quam integram ſervare oportebat, debito reddant minorem.

§. 314. Plures inſuper dantur cautelae, quas vero commodius experimentis ipſis interſeremus, ut ſimul veluti exemplo illuſtrentur.



PHOTOMETRIAE
PARS II
QVA EXPERIMENTIS ET CALCVLO SVBIICIVNTVR LVMINIS MODIFICATIONES A CORPORIBVS PELLVCIDIS, POTISSIMVM A VITRO PENDENTES.

CAPVT I.

Experimentis definitur quantitas luminis a planis vitreis perfecte pellucidis reflexi & refracti. Utraque perlustratur calculo.

§. 315.

Ad difficiliores subtilioresque accedimus luminis modificationes, quae omnem luminis theoriam eamque vel maxime excultam ita eluserunt, ut ne quidem experimentis adhucdum satis sint definitae. Horum quaedam sumsit Cel. BOVGVER, eaque descripsit in libro ob nouitatem materiae laudatissimo *Traité sur la Gradation de la Lumiere*, cuius alteram editionem superiori anno, ne inter posthuma referretur, agonizans ad finem, quem exoptabat, perduxit. Posteriorem hanc editionem, quam priorem post se longo intervallo relinquere absolutissimamque esse perhibent,

bent, nondum vidi. Quod vel ideo hic monendum duco, ut si quapiam in re humani quid passum esse acutissimum Virum, liberius dicam, primam me spectare editionem, intelligant Lectores aequi rerum arbitri.

§. 316. Theoriam in his experimentis nobis deesse, summus iam perspexit NEWTONVS, & qui eius Opticen exscripserunt Auctores omnes. A primis ergo nobis hic originibus repetenda res est, singulaeque, quibus in ea rimanda opus erit, positiones, experimentis firmandae, ut tandem per longissimam eorum *seriem* in apricum perducatur.

§. 317. Ea corpora *pellucida* vocari, quae lumen transmittunt, in vulgus notum est, communi quippe nititur loquendi more. Altioris indaginis est definitio corporum *perfecte pellucidorum.* Ea vero plerumque hoc insignienda esse nomine putant, quae lumen omne transmittunt, nullum reflectunt, nullumque intercipiunt, dispergunt, absorbent. An vero praeter spatium absolute vacuum, ecquisnam huic corporis nomen tribuet? vere detur eiusmodi corpus, quaestio est, quam ratiocinio tantum dirimere licet, cum ob absolutissimam eam pellucidatem omnem oculi aciem necessario effugiat. Quodsi quis aetherem huc referre velit, quatenus eum vehiculum lucis esse statuit, a logomachia sibi caueat, cum utique huiuscemodi vehiculum a corpore pellucido videatur distinguendum.

§. 318. Ut vero absque longorum ratiociniorum ambagibus quicquam hic statuatur, quod ab omnibus concessum iri confido, primo

corpora pellucida ſumemus, qualia ipſa natura nobis ſubminiſtrat, atque diſpiciemus, quam ob cauſſam non omne lumen tranſmittant. Quo facto experimentis litem iſtam dirimere dabitur.

§. 319. Concedendum enim erit, *lumen in corpora quaecunque, horumque quaſlibet particulas incidens ab iis reflecti ſaltem ex parte, quoties particulae iſtae abſque lumine inuiſibiles, lumine admoto viſibiles ſunt.* Porro aerem, aquam, vitrum cet. corpora eſſe pellucida nemo ſanus eſt, qui negabit. Quae cum ita ſint, en quod in vulgus notum eſt,

EXPERIMENTVM VII.

Fig. 32. §. 320. Per exiguum foramen F in cameram obſcuram incidant radii ſolares FE, qui excipiantur interpoſita ſuperficie aquae, vitri, vel alius cuiuscunque corporis pellucidi AB. Quo facto

1°. Quacunque te vergas in toto ſpatio EfFe, per quod tranſit radius, infinitos volitare videbis puluiſculos, veluti puncta tenui lumine radiantia.

2°. Similes videbis in ſpatio EGge, per quod lumen a ſuperficie AB reflecti colligitur.

3°. Porro totum ſpatium EehH in corpore pellucido, partemque ſuperficiei Ee quacunque ex parte intuearis, proprio veluti lumine radiare obſeruabis.

4°. Si DC fuerit ſuperficies vitri interior, ſimilem in Hh obſeruabis luminis partitionem ac in Ee.

5°. Sin-

5°. Singula haec phaenomena, obturato foramine Ff euanescunt. Ceterum politas esse debere superficies AB, DC vel me non monente intelligitur.

§. 321. Quatenus in hoc experimento lumen recta pergit per EG, EH, ut charta interceptum eam illuminet, priori casu *reflecti* posteriori *refringi* dicitur. Refractum quatenus per corpus AC recta transit, eatenus corpus istud *pellucidum* est. Perfecte pellucidum foret, si omne lumen transmitteret. At duplex adest eius imminutio.

§. 322. Primo enim pars quaedam regreditur per EG. quod simpliciter *lumen reflexum* vocabimus. Porro cum totum spatium EHhe visibile sit, quacunque te vergas, consequens est, lumen in transitu suo per corpus diaphanum ab eius particulis quaquauersum reflecti (§. 319.) Quod ergo cum dispergatur, *lumen dispersum* vocabimus, patetque, & ab iis particulis, quae in superficie Ee sunt, lumen dispergi, idemque in aere obtinere experimentum hoc docet, etsi experientia quotidiana non constaret, qua conuincimur, obiecta remotiora debiliori lumine gaudere, eandemque ob caussam totam athmosphaeram caeruleo colore visibilem esse.

§. 323. Haec luminis dispersio a variis pendet caussis. Huc referendos esse puluisculos aeri innatantes, vitrique superficiei copiose adhaerentes, abunde est euidens. Omnium porro corporum superficies plus minusue puluere conspersas esse, ita constat, ut satis abstergi nequeant & politissimae, quin minutissimi

ſimi puluiſculi vel remaneant, vel ex aere contiguo iterum attrahantur. Porro in vitro maximam ſemper eſſe minutiſſimarum bullularum copiam, oculus & nudus & armatus videt.

§. 324. At iam vel per ſe patet, omnia haec luminis decrementa in corpore perfecte pellucido abeſſe debere. Abſint ergo licet bullulae iſtae, abſint quoque puluiſculi, quaeritur, an ipſae corporis pellucidi particulae vel maxime homogeneae, omni vi diſpergente abſolute ſint priuae? Hoc quidem ego dubium non ſoluam. Experientia certe eiuſmodi corpus perfecte homogeneum nuſquam nobis ponit ob oculos. Interim tamen iſtud hoc ſaltem reſpectu *perfecte pellucidum* vocare haud ambigo. Ab hoc enim infimo impelluciditatis gradu ceteros computandos eſſe duco, eodem modo quo gradus caloris ab abſoluto frigore computandi ſunt, etſi uterque caſus in rerum natura vix exiſtat.

§. 325. Quodſi ergo ceu poſſibile admittatur corpus hoc ſenſu perfecte pellucidum, nondum tamen ideo abſolute pellucidum erit, niſi ſimul omne abſit lumen reflexum, (§. 322.) ita ut quantum luminis in eius ſuperficiem incidat, totum iſtud libere tranſeat, ut ne minima quidem eius pars vel reflexione vel diſperſione diuellatur a toto. Hoc demum cum fuerit, aderit pelluciditas omnibus numeris abſoluta.

§. 326. Actu non dari corpora pellucida, quae nullum lumen *diſpergant*, poſt ea quae iam diximus, vel maxime probabile eſt, tutoque affirmatur, donec euidentiſſime euincatur

contra-

contrarium. Eorum tamen possibilitatem tantum non plane negamus, eamque ob mensuram impelluciditatis admittimus. Secus est, si corpora desiderentur diaphana, quae nullum lumen *reflectant*, cum in eorum superficiem incidit. Experimentis enim mox proferendis patebit, ea non modo non existere, sed in praesenti rerum statu nequidem ea existere posse. Circa ista sequentia notasse iuuabit.

§. 327. Quantitas luminis reflexi utique, pendet a densitate curporis diaphani, simulque a desitate medii ex quo in corpus diaphanum incidit. Sic v. gr. experimentis facile probatur lumen ex aqua in vitrum incidens minus reflecti, ac cum in vitrum incidit ex aere. Contra ea, quod omnibus hactenus visum est paradoxon inexplicabile, longe magis reflectitur lumen e medio densiore in rarius, e vitro v. gr. in aerem incidens, quam cum incidit ex aere in vitrum. Hoc certe phaenomenon a solo impelluciditatis gradu vix pendet. Distinguenda enim esset impelluciditas quae in superficie vitri est ab ea quae intra vitrum adest, ita ut illa sola a medio contiguo penderet, cum haec integra maneat, atque a medio vitrum ambiente non turbetur. Sermo vero nobis hic est de ea impelluciditate, quae debetur particulis lumen dispergentibus, quaeque adeo pendet ab heterogenea earum natura. Haec sane invariata manet, siue aqua siue aer vitrum ambeat. At maxima est luminis reflexi differentia. Verosimile ergo utique videtur, lumen

iſtud reflexum potius unice deberi viribus, quibus lumen a via ſua deflectitur, dum ex uno medio in aliud incidit quod priore eſt denſuis vel rarius, ſiue cuius vis refringens eſt diuerſa. Hanc enim differentiam ita ſequitur quantitas luminis reflexi, ut cum ea ſimul creſcat atque minuatur. Quodſi vero iam concedatur lumen reflexum deberi viribus refringentibus vel aliis cum iis neceſſario connexis, concedendum eſſe quoque videtur, has vires eaſdem manere, ſiue magis ſiue minus a particulis vitri diſpergatur. Quid ad rem faciat experimentum ſequens lectores diſpiciant.

EXPERIMENTVM VIII.

§. 328. Sumſi duo vaſa figulina nigro intus encauſto parumque polito obducta, iisque ſub diu iuxta ſe poſitis, alterum impleui aqua limpidiſſima alterum atramento nigerrimo. Quo facto in utroque fluido coeli ſudi imaginem intuens, utramque aeque claram videri ad ſenſum deprehendi. Idem experimentum noctu inſtitui, imaginem muri albi in utroque fluido intuens, cum a lumine candelae remotioris colluſtrabatur. Utraque imago aeque videbatur clara. Dedi vero operam, ut anguli incidentiae & reflexionis in utraque ſuperficie fluidi eſſent aequales.

§. 329. Ni fallor in hoc experimento vis reflectens fluidi opaciſſimi & limpidiſſimi inter ſe comparatur. Utraque deprehenditur aequalis. Equidem non inficior, aequalitalitatem iſtam abſolutiſſimam eſſe nequaquam po-

potuiſſe, quippe vitriolum, quod atramentum, quo uſus ſum ingreditur, utique eius vim refringentem auxit, unde mea quidem ſententia, aucta quoque eſſe debuit vis reflectens. At differentiam iſtam utpote perexiguam oculis diſcernere non valui (§. 271.) Ceterum ſumendum fuiſſe vas nigro intus pigmento illitum, facile patet. Sumto enim vaſe albo, euidens eſt, albedinem iſtam, cum per aquam ſit viſibilis, cum claritate imaginis miſceri, hancque adeo euadere debito clariorem.

§. 330. Legitima iam mihi videtur conſequentia hinc deducenda, *eadem valere de gradibus opacitatis quibuscunque, quae de utroque extremo valent, eandemque fore vim aquae reflectentem, quantacunque vel quantulacunque ſit eius opacitas.* Detur ergo licet aqua nullum plane lumen diſpergens, non tamen dabitur, quae nullum reflectat. Etenim vis reflectens ab opacitate non pendet. Opacum vero omnino dicitur corpus, quod omne lumen intus diſpergit, ut recta iſtud permeare nequeat.

§. 331. Notare inſuper conuenit, quantitatem luminis reflexi, quatenus lumini diſperſo opponitur, maiorem eſſe, ubi magis eſt polita corporis diaphani ſuperficies. Quod ſi enim minus fuerit polita ſiue admodum aſpera, & illud quoque lumen, quod in eadem directione EG reflecteretur, quaquauerſum diſpergitur. Haec uero diſperſio ab ea, quae fit a particulis heterogeneis, opacioribus puluiſculis, bullulis &c. probe eſt diſtinguenda.

EX-

EXPERIMENTVM IX.

Fig. 33. §. 332. In plano albo ABCD atramento duxi lineam ILK cuius latitudo $=1'''$ pedis parisini, quaeque ad sensum ubique aequali nigredine gaudebat. Plano isti normaliter imposui tabulam vitream EFGH, ita ut eius basis EH cum recta IK in L angulum efficeret ILE recto aliquot gradibus minorem, planumque AC ab utraque parte tabulae vel a candelae lumine, vel a sole, vel a lumine coeli aeque collustraretur, neque a tabula obumbraretur. Sic obtinui, ut cum oculus esset in O, partem rectae posticam IL refractam videret in LQ anticam vero LK reflexam in LP. At neutra earum iam videbatur nigra, sed plus minusue cinerea, prout mutabatur situs oculi. Etenim cum imagine partis rectae posticae IL miscebatur imago plani albi LN reflexa, contra ea cum imagine partis anticae LK confusa erat imago partis plani LM per refractionem visa. Eum iam quaesiui tentando oculi situm, quo utriusque partis imago aeque videretur cinerea, quem invenire perfacile erat, cum crescente claritate altera, altera decresceret. Oculus vero, noctuque candela ita remouebantur, ut radii a parallelis parum differrent. Hoc ergo situ reperto metitus sum angulos incidentiae radiorum IQ, MP, NQ, KP, eosque inueni esse $= 14\frac{1}{2}$ gr. Eosdem quoque inueni Experimenti circumstantias ita immutando, ut tabulam sumerem plus minusue diaphanam, chartam ABCD plus minusue albam, rectam denique IK pigmento rubro, flauo caeruleo ductam &c.

§. 333.

§. 333. Cum in his experimentis anguli incidentiae utrinque sint aequales, consequens est eos in diuersitatem refractionis & reflectionis influere non posse. Unde si qua est eiusmodi diuersitas, ista simpliciter pendet a claclaritate chartae atque coloris rectae IK. Nullum vero est dubium, quin lumen reflexum & refractum ita ab utraque ista claritate pendeat, ut una cum ea augeatur & minuatur. Aequales porro sunt anguli emanationis, & punctorum I, M, N, K a punctis Q, P adeoque & imaginum ab oculo distantiae. Ut adeo lumen in Q, P utrinque incidens constanter sit in ratione claritatis rectae IK & tabulae vel plani ABCD.

§. 334. Sit ergo claritas rectae IK vel lumen ab ea in P, Q incidens $= \alpha$ hoc lumen ita in Q, P diuidatur ut per vitrum transeat pars $= \nu\alpha$, reflectatur pars $= \mu\alpha$, amittatur residuum $= \alpha(1 - \nu - \mu)$. Similiter sit lumen a plano MN in Q, P incidens $= \beta$. iterum transibit $\nu\beta$, reflectetur $\mu\beta$, dispergetur $\beta(1 - \nu - \mu)$ siue si concedere hoc nolis, ponamus refractum $= N\beta$, reflexum $= M\beta$, amissum $= \beta$ $1 - N - M$.) Erit ergo claritas imaginis per rectam OQ visae

$$= \nu\alpha + M\beta$$

claritas eius, quae per rectam QP videtur

$$= \mu\alpha + N\beta.$$

At iam vi experimenti utraque imago est aeque clara, adeoque erit

$$\nu\alpha + M\beta = \mu\alpha + N\beta.$$

unde habetur

$$(\nu - \mu)\alpha = (N - M)\beta.$$

At

At enim eadem obtinet aequalitas, idemque angulus, utcunque mutetur quaelibet claritatum α, β. Necessario ergo faciendum est $\nu = \mu$ & $N = M$. *Ut adeo quantitas luminis sub angulo* $14\frac{1}{2}$ *gr. in planum vitreum incidentis, reflexa & refracta sit aequalis, qualiscunque sit incidentis intensitas.*

§. 335. Quodsi ergo nullum lumen dispergatur erit $\nu + \mu = N + M = 1$, adeoque $\nu = \mu = N = M = \frac{1}{2}$. *Quare in casu perfectae pelluciditatis* (324.) *lumen sub angulo* $14\frac{1}{2}°$ *in planum vitreum incidens, ita dispescitur, ut dimidia eius pars reflectatur, dimidia vero refringatur.*

§. 336. Contra ea si quaedam pars luminis intercipiatur, ut in omni vitro solet, necessario ea erit incidenti proportionalis, quippe pendet a numero obstaculorum in quae incurrit, & a densitate luminis quod incidit. Quare faciendum erit $\nu = N$, $\mu = M$. *Manebit ergo ratio inter lumen reflexum & refractum, etsi variabilis sit utriusque ad admissum ratio, atque incidentis densitas.*

§. 337. Aut ergo omnia me fallunt, aut quantitas luminis reflexi & in casu perfectissimae transparentiae (§. 324.) non modo non destruitur, sed potius augetur, cum pars eius acedat, quod a vitris minus diaphanis dispergitur.

§. 338. Cum igitur ea vitra nobis hic sint perfecte pellucida, in quibus est $M + N = 1$, siue in quibus summa luminis reflexi & refracti aequatur quantitati incidentis, hac eius notione in capite praesenti utemur, ut cetera

ra quoque eius ſumptomata ad liquidum perducere liceat.

EXPERIMENTVM X.

§. 339. Per exiguum foramen A in cameram obſcuram intromittatur radius luminis AB, iſque excipiatur ſub angulo obliquiore ABP a tabula vitrea ſatis craſſa, atque lumen vitrum ingreſſum ſucceſſiue reflexum videbis viam percurrere BCDEFFG &c. ita ut puncta B, C, D, E &c. veluti radiantia viſibilia ſint. Porro quod reſiduum eſt lumen in puncta iſta, C,D,E,F &c. incidit, ibidemque refringitur atque in aerem eius partem transmigrare obſeruabis. Ante vero eius in vitrum ingreſſum, dum in B incidit, iam ibi eius partem vides reflexam. Quodſi ergo radii iſti in aerem regreſſi ſupra & infra tabulam charta excipiantur, plures in ea videbis ſolis imagines. Harum prima quae a puncto B prouenit debilior eſt, ſecunda quae poſt duas refractiones a puncto C procedit clarior erit. Sequentes, quae poſt plures reflexiones in utraque charta depinguntur ſucceſſiue ſecunda erunt obſcuriores, ita creſcente obſcuritate, ut imago decima aut duodecima viſum fere effugiat. Aucto angulo incidentiae ABP, vel apertura foramis A, vel ſumta tabula vitrea minus craſſa, imagines iſtae confunduntur, ut unicam conſtituere videantur, cuius extremitates medio erunt paullo obſcuriores. Fig. 34.

§. 340. Patet ergo hinc luminis a plano vitreo reflexi & refracti quantitatem ex infinitis fere imaginibus eſſe compoſitam. Etſi enim in

in experimento non infinitae videantur, attamen nullum eſt dubium quin adhuc reuera adſint adeo obſcurae, quae viſui ſeſe ſubducant. Ut adeo ſi ſumma claritatis cunctarum imaginum quaeratur, perinde ſit, infinitus ponatur earum numerus nec ne. Eam enim ſummam ſi per ſeriem infinitam exprimamus, cuius ſinguli termini claritatem cuiusdam imaginis exprimant, ſeries iſta non poteſt non eſſe admodum conuergens, ut adeo ſumma utique parum alteretur, ſiue termini poſtremis propiores omittantur ſiue eorum quoque habeatur ratio. Hoc vero illi praeſtare ob calculi concinnitatem mox videbimus.

§. 341. Sit iam denſitas luminis incidentis in B $= 1$, reflectatur eius pars $= q$. refringatur pars n. Eritque $q + n = 1$, quoties vitrum ſumitur eſſe perfecte pellucidum ſiue nullum lumen diſpergens, quale in praeſenti capite illud eſſe ponimus.

§. 342. Similiter dicto lumine intra vitrum in C incidente $= 1$, quantitas reflexa vocetur p, refracta m, erit quoque $p + m = 1$, poſito nempe iterum vitro perfecte pellucido. Literae vero iſtae q, n, p, m in toto capite praeſenti & ſequente hunc quam ipſis hic tribuimus, habebunt ſignificatum, quod & de maiuſculis valet, quibus mox utemur.

§. 343. Erit ergo claritas

imaginis B $= q$

C $= nm$

D $= npm$

E $= nppm$

F $= np^3m$ &c.

adeo-

adeoque quantitas luminis ſurſum reflexi & refracti, quam ſupra vocauimus M, erit

$$M = q + nmp + nmp^3 + nmp^5 + nmp^7 + \&c.$$

Similiter quantitas luminis deorſum refracti

$$N = nm + nmp^2 + nmp^4 + nmp^6 + \&c.$$

Termini ſeriei M exhibent claritates imaginum B, D, F, H &c. ſeriei N vero imaginum C, E, G, I &c.

§. 344. Utraque iſta ſeries eſt progreſſio geometrica conuergens, cuius ergo ſumma datur, eritque

$$M = q + \frac{nmp}{1 - pp}$$

$$N = \frac{nm}{1 - pp}$$

adeoque

$$M = q + pN.$$

§. 345. Cum iam pro vitris perfecte pellucidis ſit $q + n = 1, p + m = 1$. ſubſtitutione facta erit

$$M = q + \frac{np}{1 + p} = \frac{q + p}{1 + p}$$

$$N = \frac{n}{1 + p} = \frac{1 - q}{1 + p} = \frac{n}{2 - m}$$

hinc

$$M + N = \frac{q + p}{1 + p} + \frac{1 - q}{1 + p} = \frac{1 + p}{1 + p} = 1.$$

quod etiam eſſe debet, quippe vitrum nullum lumen diſpergere aſſumſimus.

§. 346. Valores literarum q, p, quae vim reflectentem ſuperficiei vitri exterioris & inte rio-

terioris denotant, unico tantum plano vitreo adhibito definire nullo modo mihi licuit. Datur quidem methodus valorem q definiendi, qua infra utemur, at longe difficilius determinatur valor p, quippe necessario pendet a dispersione luminis, si vitrum non fuerit perfecte pellucidum. Contra ea valorem ipsius q a minori ista transparentia longe minus pendere iam supra vidimus. (§. 328. 329.)

§. 347. Notandum vero est, in toto hoc calculo radiorum quantitatem hic tantum in censum venire. Etenim utique eorum densitas in vitro a densitate in aere differt, atque duplici ex caussa minor est. Etenim in vitro ad perpendiculum propius accedunt radii refracti, quod eorum ab inuicem distantiam auget, densitatem minuit. Porro pars eorum iam in superficie reflectitur, quo minuitur eorum quantitas adeoque & densitas. An celeritas, quae in vitro etiam diuersa est, quicquam ad augendam vel minuendam radiorum intensitatem faciat, liquido non constat. Insuper mirum in modum hic inter se dissentiunt NEWTONVS atque EVLERVS & quicunque ab horum partibus stant Optices scriptores. NEWTONVS celeritatem in vitro auctam, EVLERVS eandem imminutam statuit. Nobis vero hic perinde est, cuicunque parti adhaereas, eum sufficiat, radiorum quantitatem non alterari, distantiam & celeritatem, cum in aerem iterum egrediuntur veluti in integrum restitui, eandemque euadere, qualis erat ante eorum in vitrum ingressum.

§. 348.

§. 348. Quod ut clarius pateat, ponamus literas q, n, p, m, non significare radiorum quantitatem, sed ipsam luminis vim atque intensitatem, siue haec pendeat a densitate siue a celeritate radiorum, siue ab alia caussa quacunque. Atque euidens est, non posse fieri $q+n=1$, $p+m=1$, uti fecimus in §. 345. adeonec posse reduci formulas (§. 344.)

$$M = q + \frac{nmp}{1-pp}$$

$$N = \frac{nm}{1-pp}$$

$$M = q + pN.$$

sed eas integras manere.

§. 349. At vero in casu perfectae pelluciditatis nilominus erit $M + N = 1$. adeoque facere utique licet

$$M = 1 - N = q + pN$$

unde habetur

$$N = \frac{1-q}{1+p}$$

$$M = \frac{q+p}{1+p}$$

Unde ergo manifestum est, easdem prodire formulas, quas dedit computus quantitatis radiorum (§. 345.) Hoc tantum adest discrimen, ut literis n, m uti non detur, si istae vim luminis denotent, quippe experimentis valor summarum $q+n$, $p+m$ detegi plane nequit. Contra ea uti ipsis licebit, simulac eas radiorum quantitatem denotare assumimus.

§. 350. Eſſe uero $N+M=1$, experimenta non docent, cum non detur vitrum nullos radios diſpergens. Ratiocinio tantum hoc obtinere aſſequimur. Quodſi tamen ſucceſſiue ſumantur vitra pellucidiora, facile patebit, ſummam $N+M$ eo magis ad unitatem accedere, quo vitra ſunt pellucidiora.

EXPERIMENTVM XI.

Fig. 35. §. 351. Sint omnia ut in experimento IXmo, abſit ſola recta IK, quacunque te vergas, videbis in quouis puncto tabulae vitreae Q, P utramque imaginem partis plani poſticae ABHE & anticae EHED confuſam, adeoque eiusdem luminis ſub eodem angulo reflexi & refracti ſummam $N+M$. Quodſi iam vitrum eſſet perfecte pullucidum, haec ſumma deberet eſſe aequalis claritati plani AC nullo interueniente vitro viſae. At iam in vicem unius tabulae iuxta ſe colloces plures, pelluciditate inter ſe diuerſae, quod facile cognoſces, partem plani anticam charta nigra obtegendo. Qua iterum ſublata, ſumam claritatum $N+M$ per ſingula vitra non modo videbis a claritate totius plani parum differre, ſed eo minus differet, quo maior fuerit pelluciditatis gradus, ita ut adhibito vitro tenuiſſimo & inſtar adamantis pellucido, differentia iſta inter ſummam $M+N$ & claritatem directam oculi aciem fere effugiat.

EXPERIMENTVM XII.

Fig. 35. §. 352. Radii ſolis ſiue candelae remotioris in planum album AB incidant ſub directione

ne GB, FA. In B & A erigantur duae tabulae vitreae BD, CA ad directionem luminis & planum AB normales. Quo facto ſpatium AB illuminabitur a radiis ECAF quos vitrum AC reflectit, & a radiis FABG, qui vitrum BD permeant. Anguli incidentiae in utroque vitro & in plano AB ſunt iidem, & ſub iisdem lumen directe incidit in ſpatium anterius BH. Erit ergo claritas in AB $= N+M$, in BH $= 1$. At iam ſuſtitutis ſucceſſiue vitris magis pellucidis, ſiue iiſdem iuxta ſe collocatis, claritatem in AB eo propius àd claritatem BH accedere videbis, quo maior fuerit utriusque vitri pelluciditas, ut ſumtis iisdem maxime pellucidis differentia fere euaneſcat.

§. 353. Patet ergo in caſu perfectae pelluciditatis poni poſſe $M+N=1$, adeoque & (§. 349.)

$$M = \frac{q+p}{1+p}$$

$$N = \frac{1-q}{1+p}$$

§. 354. Sint iam in B I tabulae vitreae quotlibet ſibi ita impoſitae ut ſeſe non contingant. Fig. 36. In has incidat lumen AB ſub angulo quocunque, atque patet, lumen poſt multifarias reflexiones & refractiones ita tandem diuiſum iri, ut eius altera pars ſurſum reflectatur, nunquam in vitrum regreſſura, altera pariter vitra iſta poſt ſe relinquens inferiora petat. Prius dicemus *reflexum* illudque referre ponemus rectam BC. Poſterius, quod referat recta DE *refractum* vocabimus. Porro lumen incidens, re-

reflexum & refractum, ut inter se comparari possit efferemus per $1, \varrho, \nu$. ita ut si incidens sit $= 1$, reflexum dicatur $= \varrho$, refractum $= \nu$.

§. 355. At iam tabulis istis vitreis aliae supponantur quotlibet EO, similis & in his fiet luminis incidentis distributio. Dicto ergo iterum incidente $= 1$, fiat reflexum $= \varpi$, refractum $= \mu$.

§. 356. Cum vitra ponantur perfecte pellucida, patet esse $\varrho + \nu = 1$, & $\varpi + \mu = 1$. ut adeo hoc modo e calculo instituendo istarum quantitatum duae eliminentur, cum formulas contrahere utile fuerit.

§. 357. Quodsi iam lumen in E incidens sit illud, quod vitra superius posita permeauit, erit istud $= \nu$, atque in EFH ita diuidetur, ut quantitas eius quae deorsum abit per GF sit $= \nu\mu$, quae sursum remeat $= \nu\varpi$. Posterior haec quantitas iterum incidit in I, ibique denuo diuiditur, ut pars quae abit per KL sit $= \nu\varpi$ quae vitra inferiora petit $= \nu\varpi\varrho$. Similes porro cumpatiatur partitiones, ponamus lumen omne superiora petens $= \lambda$, deorsum cadens $= \varkappa$, patet fore

$$\lambda = \varrho + \nu^2\varpi + \varrho\nu^2\varpi^2 + \nu^2\varpi^3\varrho^2 + \nu^2\varpi^4\varrho^3 + \&c.$$

$$\varkappa = \nu\mu + \nu\mu\varpi\varrho + \nu\mu\varpi^2\varrho^2 + \nu\mu\varpi^3\varrho^3 + \&c.$$

Hae

Hae feries funt progreffiones geometricae conuergentes, adeoque datur earum fumma eritque

$$\lambda = \varrho + \frac{\nu\nu\varpi}{1 - \varpi\varrho}$$

$$\varkappa = \frac{\nu\mu}{1 - \varpi\varrho}$$

§. 358. Formulae hae obtinent, qualiscunque fit vitrorum pelluciditas. At cum ea hic ponamus perfecte pellucida, erit $\varrho + \nu = \varpi + \mu = 1$. Unde fubftitutione facta prodit

$$\lambda = \frac{\varrho + \varpi - 2\varrho\varpi}{1 - \varpi\varrho}$$

$$\varkappa = \frac{\nu\mu}{\nu + \mu - \nu\mu}$$

Quo ergo modo datur lumen a cunctis vitris reflexum & refractum per illud, quod a fuperioribus & inferioribus figillatim reflectitur & refringitur, fiue datur λ per ϱ & ϖ, $\varkappa$ vero per ν & μ.

§. 359. Quodfi iam unico vitro in E relicto, in B fucceffiue ponantur vitra 0,1,2,3,4&c....(x--1), ut numerus cunctorum fiat 1,2,3,4,5....x, fubftitutione facta facile ex utraque hac formula eruentur fequentes, ut fit quantitas luminis

a plano	reflexa	refracta
uno	$M = M$	$N = N$
duobus	$P = \frac{2M}{1+M}$	$Q = \frac{N}{2-N}$

 tri-

tribus............$R = \frac{3M}{1+2M}$ ....$S = \frac{N}{3-2N}$

quatuor..........$T = \frac{4M}{1+3M}$.......$V = \frac{N}{4-3N}$

quinque..........$L = \frac{5M}{1+4M}$.......$K = \frac{N}{5-4N}$

ſex..................$I = \frac{6M}{1+5M}$ ......$H = \frac{N}{6-5N}$

&c.................&c. &c.

x.................$X = \frac{xM}{1+(x-1)M}$ $Y = \frac{N}{x-(x-1)N}$

§. 360. Data ergo luminis quantitate ab uno vitro reflexa & refracta, datur ea, quae a vitris quotcunque x iunctim ſumtis reflectitur & refringitur. Quantitates vero iſtae Y decreſcunt ut ordinatae hyperbolae intra aſymtoton aeque diſtantes, X vero eſſe earum ad unitatem complementum vel per ſe eſt euidens. Pro hyperbola logarithmicam ſumſit cel. BOVGVER in tractatu ſupra laudato (§. 315.) At infinitas iſtas reflexiones in calculum ſuum non induxit. Sumſit enim lumen v. gr. per HI reflexum a vitris inferioribus a aut non reflecti deorſum, aut debilius eſſe, quam ut ipſius ratio haberi debeat. Hoc enim ſilentio praeterit. Ceterum in capite ſequente videbimus, cel. huius Auctoris placita magis ad veritatem accedere ſi vitra ſumantur, ut reuera ſunt, minus nempe pellucida, etſi cum veritate nec in hoc caſu perfecte coincidant.

§. 361. Ex formulis iſtis iam vel ſua ſponte patet, aucto vitrorum numero augeri quoque quan-

quantitatem luminis reflexi, ita ut incidenti tandem euadat aequalis. Contra ea minuetur quantitas refracta, siue quae per cuncta vitra transit.

§. 362. Cum vitra perfecte pellucida actu non dentur, nulla quantitatum M,N,P,Q &c. experimentis seorsim definiri poterit. Quodsi vero inter binas M, N; P,Q; R,S &c. quae ad eundem vitrorum numerum pertinent, comparatio sit instituenda, fieri hoc poterit multiplici modo, independenter a vitrorum transparentia. Patet enim lumen reflexum & refractum, cum singula vitra simili ratione permeare debeat, simile quoque pati quantitatis decrementum, utrumque ergo eadem ratione a particulis vitri dispergentibus minui. Et si quae unquam adest differentia, plane ista fiet insensibilis & contemnenda, simulac experimenta instituantur, vitris adhibitis, quae maxime sunt diaphana.

§. 363. His ita praenotatis eos primo perlustrabimus Casus, quibus lumen reflexum refracto est aequalis. Experientia, quibus demonstratur, lumen obliquius in vitrum incidens, fortius reflecti, fusius hic non describemus. Infinita huiusce modi excogitare haud est difficile, atque infra quaedam occurrent, cum alias ob caussas iis utemur. Cum ergo aucto vitrorum numero augeatur quantitas luminis reflexa, (§. 362,) eadem haec vero minuatur crescente angulo incidentiae, consequens est, cuilibet vitrorum numero 1, 2, 3, 4 &c respondere angulum, sub quo lumen reflexum refracto fit aequale. Anguli isti suo

ordine vocentur A, B, C, D, E, F &c. ita ut A respondeat vitro uni, B duobus, C tribus &c, sitque pariter angulus A primus, B secundus, C tertius &c. Ita v. g. experimento IX. (§. 332.) constat angulum A esse $= 14\frac{1}{2}$ gr. Quales sint ceteri infra videbimus.

§. 364. At iam formulae §. 359. ita inter se cohaerent, ut datis quantitatibus X, Y pro angulo incidentiae quocunque, & vitrorum numero quocunque, simul dentur quantitates M, N, P, Q, R, S &c. alii cuilibet vitrorum numero 1, 2, 3, 4, &c, sed eodem angulo pro singulis retento, respondentes. Duplici ergo modo variatur vitrorum numerus. Prior, quem hactenus vocauimus $= x$, ordinem anguli A, B, C, D &c. seruat, sub quo lumen reflexum a vitris x refracto est aequalis. Alter numerus, quem per z efferemus, variabilis esse potest, manente angulo numeroque vitrorum x ipsi respondente.

§. 365. Quae distinctio ut fiat euidentior, sit angulus L, sub quo lumen in x vitra incidens aeque diuiditur reflexione & refractione, patet fore $X = Y = \frac{1}{2}$, adeoque (§. 359.)

$$\frac{1}{2} = \frac{xM}{1+(x-1)M} = \frac{N}{x+(x-1)N}$$

Unde erit

$$N = x : (1+x)$$
$$M = 1 : (1+x)$$
$$x = N : M.$$

Datur ergo lumen ab unico vitro sub angulo L reflexum M, & refractum N, per numerum vitrorum x, quae iunctim sumta lumen sub eodem

eodem angulo L incidens ita diuidunt, ut reflexum X refracto Y ſit aequale.

§. 366. His ergo valoribus in formulis §. 359. ſubſtitutis dabitur quoque P, Q, R, S, T, V &c. ſiue lumen a quolibet alio vitrorum numero ſub eodem angulo L reflexum & refractum. Dicto ergo hoc vitrorum numero $= z$, lumine reflexo $= \xi$, refracto $= \eta$. patet generaliſſime fore

$$\xi = \frac{x}{x+z}$$

$$\eta = \frac{z}{x+z}$$

§. 367. Ita vero hae formulae comparatae ſunt, ut manente angulo L, maneat numerus vitrorum x, quippe qui ab angulo iſto pendet (§. 363.) variabilis vero erit z. Contra ea mutato angulo L, ut ſit A, B, C, &c. mutabitur quoque x, ut ſit 1, 2, 3 &c. & numerus vitrorum z referetur ad angulum iſtum immutatum. Sic ergo in genere erit lumen a z vitris

ſub angulo		reflexum		refractum
I°	A	$\frac{1}{1+z}$		$\frac{z}{1+z}$
II°	B	$\frac{2}{2+z}$		$\frac{z}{2+z}$
III°	C	$\frac{3}{3+z}$		$\frac{z}{3+z}$
IV°	D	$\frac{4}{4+z}$		$\frac{z}{4+z}$

V°

$V^{o}\ E$ - - - - - $\frac{5}{5+z}$ - - - - $\frac{z}{5+z}$

&c. &c. &c. &c.

$x^{10}\ L$ - - - - - $\frac{x}{x+z}$ - - - - $\frac{z}{x+z}$

§. 368. Subſtitutis ergo pro z ſucceſſive 1, 2, 3, 4 &c. ſequens concinnatur tabella

Lumen a vitris	ſub Angulo	I° . *A.*	II° . *B.*	III° . *C.*	IV° . *D.*	V. . *E.*	VI. . *F.*
I°	reflex. *M*	$=\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$
	refract. *N*	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{6}{7}$
II^{bus}	reflex. *P*	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{2}{8}$
	refract. *Q*	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{6}{8}$
III^{bus}	reflex. *R*	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{9}$
	refract. *S*	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{6}{9}$
IV	reflex. *T*	$\frac{4}{5}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{10}$
	refract. *V*	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{6}{10}$
V	reflex. *L*	$\frac{5}{6}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{5}{10}$	$\frac{5}{11}$
	refract. *K*	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{5}{10}$	$\frac{6}{11}$
VI	reflex. *I*	$\frac{6}{7}$	$\frac{6}{8}$	$\frac{6}{9}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{6}{11}$	$\frac{6}{12}$
	refract. *H*	$\frac{1}{7}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{5}{11}$	$\frac{6}{12}$

§. 369. Ex hac tabella, quae facile in longum & latum ulterius extendi poteſt, vel per ſe patet, ſingulos angulos A, B, C, &c. pluribus modis experimentis detegi poſſe. Quaerendus ſit v. gr. angulus B adhibitis tribus vitris. Erit lumen a tribus vitris reflexum $R = \frac{3}{5}$, refractum $S = \frac{2}{5}$, unde $R : S = 3 : 2$. Is ergo quaerendus eſt angulus, ſub quo lumen in tria vitra incidens ita diuiditur, ut pars reflexa ſe habeat ad refractam in ratione 3 : 2. Experimenta, quae hunc in finem inſtitui, infra deſcripta dabo una cum aliis, quae ad determinandos valores q, p faciunt. Jam vero lubet methodum oſtendere, cuius ope quantitatum q, p pro ſingulis angulis determinantur limites, quos excedere nequeunt. Ita fiet, ut etiamſi valores iſti experimentis exacte determinari non poſſent, nilominus pro angulis A, B, C &c. quam proxime innoteſcant. Utilitate ſua haec methodus in rebus phyſicis non caret, etſi parum adhuc uſitata ſit. Unicum eſt quod ſciam exemplum a ſummo NEWTONO excogitatum, cum modum oſtenderet, quo ex data longitudine caudae cometae adparente eiuſque elongatione a ſole diſtantiae geocentricae ipſius cometae limites figuntur. Vid. eius *Syſtema Mundi*, quod extat in *Opuſculis*, *Tom. II.*

§. 370.

§. 370. Ut ergo rem ipſam adgrediamur, recordandum eſt, pro angulo *x*ᵗᵒ (§. 364.) eſſe (§. 365.)

$$M = \frac{1}{1+x}$$

$$N = \frac{x}{1+x}$$

Porro eſſe uniuerſaliter (§. 349.)

$$M = \frac{q+p}{1+p}$$

$$N = \frac{1-q}{1+p}$$

Quibus ergo valoribus aequatis erit

$$\frac{1}{1+x} = \frac{q+p}{1+p}$$

$$\frac{x}{1+x} = \frac{1-q}{1+p}$$

Unde porro

$$p = \frac{1-q-xq}{x}$$

$$q = \frac{1-px}{1+x}$$

§. 371. At iam vel per ſe patet, neceſſario eſſe

$$p > 0 \qquad p < 1$$
$$q > 0 \qquad q < 1$$

Lumen enim reflexum neque negatiuum neque incidenti maius eſſe poteſt. Ex altera poſitione, $p < 1$ & $q < 1$ nil ſequitur quod ad rem face-

faceret. Unde priorem tantum perlustrabimus, eritque

$$\frac{1-q-xq}{x} > 0 \qquad \frac{1-px}{1+x} > 0$$

adeoque

$$q < \frac{1}{1+x} \qquad p < \frac{1}{x}$$

Quodsi ergo pro x successiue substituatur, 1, 2, 3, 4 &c. limites quantitatum q, p, pro angulis A, B, C, D &c. sequenti exhibere licet tabella.

Sub angulo incidentiae		debet esse lumen reflexum a superficie vitri exteriore	interiore
1°	A - - - - - -	$q < \frac{1}{2}$	$p < \frac{1}{1}$
2°	B - - - - - -	$q < \frac{1}{3}$	$p < \frac{1}{2}$
3°	C - - - - - -	$q < \frac{1}{4}$	$p < \frac{1}{3}$
4°	D - - - - - -	$q < \frac{1}{5}$	$p < \frac{1}{4}$
5°	E - - - - - -	$q < \frac{1}{6}$	$p < \frac{1}{5}$
6°	F - - - - - -	$q < \frac{1}{7}$	$p < \frac{1}{6}$
&c.		&c.	&c.
$x$to	- - - - - - -	$q < \frac{1}{1+x}$	$p < \frac{1}{x}$

§. 372. Ut in hac tabella limites ipsius q angustiores sunt illis, quibus circumscripta est quantitas p, ita reuera quoque experimentis inuenitur esse constanter $q < p$, siue superficiem vitri interiorem lumen copiosius reflectere, quam vero reflectitur a superficie exteriore. Unde ergo noui dabuntur limites prioribus angustiores. Erit enim

$$\frac{1-q-xq}{x} > q \quad \& \quad \frac{1-px}{1+x} < p$$

adeo-

adeoque

$$q < \frac{1}{1+2x} \qquad p > \frac{1}{1+2x}$$

Quare pro x ſucceſſiue ſubſtituendo 1, 2, 3, 4 &c. erit pro angulis

I° A	$q < \frac{1}{3}$	$p > \frac{1}{3}$	ſed	$p < 1$
II° B	$q < \frac{1}{5}$	$p > \frac{1}{5}$		$p < \frac{1}{2}$
III° C	$q < \frac{1}{7}$	$p > \frac{1}{7}$		$p < \frac{1}{3}$
IV° D	$q < \frac{1}{9}$	$p > \frac{1}{9}$		$p < \frac{1}{4}$
V° E	$q < \frac{1}{11}$	$p > \frac{1}{11}$		$p < \frac{1}{5}$
IV° F	$q < \frac{1}{13}$	$p > \frac{1}{13}$		$p < \frac{1}{6}$
&c.	&c.	&c.		&c.
x^{to}	$q < \frac{1}{1+2x}$	$p > \frac{1}{1+2x}$		$p < \frac{1}{x}$

Limites ergo ipſius q cadunt intra o & $\frac{1}{1+2x}$, ipſius p vero intra $\frac{1}{x}$ & $\frac{1}{1+2x}$ continentur.

§. 373. Porro aut ſemper aut certe ſub angulis incidentiae maioribus quales ſunt anguli A, B, C &c. inuenitur eſſe $M < p$. Sed eſt (§. 349.)

$$M = \frac{q+p}{1+p} = p \mp \frac{q-pp}{1+p}$$

Unde erit plerumque $q-pp$ quantitas poſitiua, quare

$$q-pp > 0$$
$$q > pp$$

Sed

Sed iam vidimus esse $p > \frac{1}{1+2x}$ (§. 372.) quare erit

$$q > \frac{1}{(1+2x)^2}$$

Et ob

$$q = \frac{1 - - px}{1+x}$$

erit

$$\frac{1 - - px}{1+x} > \frac{1}{(1+2x)^2}$$

adeoque

Quare iam limites erunt, pro angulis

1° $A - - q > \frac{1}{9} - - q < \frac{1}{3} - - p > \frac{1}{3} - - p < \frac{7}{9}$
2° $B - - q > \frac{1}{25} - q < \frac{1}{5} - - p > \frac{1}{5} - - p < \frac{11}{25}$
3° $C - - q > \frac{1}{49} - q < \frac{1}{7} - - p > \frac{1}{7} - - p < \frac{15}{49}$
4° $D - - q > \frac{1}{81} - q < \frac{1}{9} - - p > \frac{1}{9} - - p < \frac{19}{81}$
5° $E - - q > \frac{1}{121} q < \frac{1}{11} - p > \frac{1}{11} - p < \frac{23}{121}$
6° $F - - q > \frac{1}{169} - q < \frac{1}{13} - p > \frac{1}{13} - p < \frac{27}{169}$
&c. &c. &c. &c. &c.

$$x^{to} - - q > \frac{1}{(1+2x)^2} - - q < \frac{1}{1+2x} - - p > \frac{1}{1+2x}$$
$$- - p < \frac{3+4x}{(1+2x)^2}$$

§. 374. Hos limites ita iam contrahemus, ut pateat quantum a medio arithmetice inter extrema sumto ipsa extrema utrinque distent. Erunt ergo limites

Sub angulo	pro lumine q	pro lumine p.
1° A	$\frac{2}{9} \pm \frac{1}{9}$	$\frac{5}{9} \pm \frac{2}{9}$
2° B	$\frac{3}{25} \pm \frac{2}{25}$	$\frac{8}{25} \pm \frac{3}{25}$
3° C	$\frac{4}{49} \pm \frac{3}{49}$	$\frac{11}{49} \pm \frac{4}{49}$
4° D	$\frac{5}{81} \pm \frac{4}{81}$	$\frac{14}{81} \pm \frac{5}{81}$
5° E	$\frac{6}{121} \pm \frac{5}{121}$	$\frac{17}{121} \pm \frac{6}{121}$
6° F	$\frac{7}{169} \pm \frac{6}{169}$	$\frac{20}{169} \pm \frac{7}{169}$
&c.	&c.	&c.
$x$to	$\frac{1+x}{(1+2x)^2} \pm \frac{x}{(1+2x)^2}$	$\frac{2+3x}{(1+2x)^2} \pm \frac{1+x}{(1+2x)^2}$

§. 375. Cum vero nequaquam verosimile sit, quantitates q, p alterutri limiti esse notabiliter propiores, haud multum aberrabimus, si eas medio isti arithmetice proportionali aequales esse statuamus, ut proxime sit pro angulis

1° A	$q = \frac{2}{9}$	$p = \frac{5}{9}$
2° B	$q = \frac{3}{25}$	$p = \frac{8}{25}$
3° C	$q = \frac{4}{49}$	$p = \frac{11}{49}$
4° D	$q = \frac{5}{81}$	$p = \frac{14}{81}$
5° E	$q = \frac{6}{121}$	$p = \frac{17}{121}$
6° F	$q = \frac{7}{169}$	$p = \frac{20}{169}$
&c.	&c.	&c.
$x$to	$q = \frac{1+x}{(1+2x)^2}$	$p = \frac{2+3x}{(1+2x)^2}$

Verae itaque quantitates q, p ab his, quae mediae sunt parum distabunt.

§. 376. Quantitates hae mediae, ut & limites, quibus veras circumscriptas esse ostendi-

dimus, ab experimentis fere non pendent, unde eo maioris sunt faciendi, quo pluribus aberrationibus experimenta, quibus verae determinandae sunt, obnoxiae esse possunt. Cum enim quoduis experimentum a vero plus minusue aberret, saltem aberrare possit, facile patet, multiplicatum errorem esse metuendum, simul ac pro determinanda quantitate plura experimenta combinanda sunt. Quod cum in praesenti casu contingat, solatio quodammodo erit, cum videbimus, quantitates *q*, *p* experimentis definitas intra praescriptos limites contineri, & a mediis, quas determinauimus, fere non esse diuersas. At iam primo definiendi sunt anguli *A*, *B*, *C* &c.

EXPERIMENTVM XIII.

§. 377. Sint omnia ut in experimento IX. (§. 332.) in vicem unius tabulae vitreae successiue substitui duas, tres, quatuor &c. atque eodem modo eum quaesiue situm oculi *O*, quo rectae ILK imago reflexa & refracta aeque videbatur cinerea vel aeque colorata. Quo reperto metitus sum angulos incidentiae in Q & P. Experimentum hoc iisdem variatis circumstantiis eodem modo quo experimentum mox citatum instauraui, atque inueni angulos incidentiae pro Fig. 33

vitris		vitris	
1	= $14\frac{1}{2}$ gr.	6	= 39 gr.
2	= 22.	7	= 43
3	= 27.	8	= 47
4	= 31.	9	= $50\frac{1}{2}$.
5	= 35.		

§. 378. Plures angulos non quaesiui, cum viderem eos difficilius determinatum iri. Etenim iis notabiliter mutatis claritatem imaginum nihilominus parum mutari obseruaui. Ceterum finitum esse eorum numerum facile patet, & ex formulis (§.370.)

$$p = \frac{1 - q - qx}{x}$$

$$q = \frac{1 - px}{1 + x}$$

necessaria consequentia euincitur. Sumto enim numero vitrorum vel angulorum x infinito, foret $p = -q$. adeoque negatiua, quod absonum est, quia utraque quantitas q, p constanter est > 0.

§. 379. At iam eodem modo, quo supra vidimus, pro angulo primo esse $M = N$ (§.334.) patebit pro sequentibus esse $P = Q$, $R = S$, $T = V$ &c. Adeoque vi definitionis (§.363.) anguli his experimentis definiti, iidem sunt, quos *A, B, C, D, E&c.* vocauimus. Est ergo.

$A = 14\frac{1}{2}$ gr.	$F = 39$ gr.
$B = 22.$	$G = 43$
$C = 27.$	$H = 47$
$D = 31.$	$I = 50\frac{1}{2}$
$E = 35.$	

§. 380. His experimentis quilibet istorum angulorum peculiari numero vitrorum exploratur. Ut vero, quod supra promisimus (§. 369.) ostendamus, singulos, quotlibet adhibitis vitris inueniri posse, videamus quomodo unico tantum vitro determinentur. Quem in

in finem tabulam §. 368. ingrediendo, obſervamus eſſe debere pro angulo incidentiae

A - - $M = \frac{1}{2}$	- - $N = \frac{1}{2}$	adeoque $M : N$	$= 1:1$
B - - - $= \frac{1}{3}$	- - - $= \frac{2}{3}$	- - - - - - - -	$= 1:2$
C - - - - $= \frac{1}{4}$	- - - $= \frac{3}{4}$	- - - - - - - -	$= 1:3$
D - - - $= \frac{1}{5}$	- - - $= \frac{4}{5}$	- - - - - - - -	$= 1:4$
E - - - $= \frac{1}{6}$	- - - $= \frac{5}{6}$	- - - - - - - -	$= 1:5$
F - - - $= \frac{1}{7}$	- - - $= \frac{6}{7}$	- - - - - - - -	$= 1:6$
&c. &c.	&c.		&c.

Sic ergo inſtituendum erit experimentum, ut quaerantur anguli, ſub quibus lumen reflexum eſt ad refractum in ea ratione, quam tabellae haec oſtendit.

EXPERIMENTVM XIV & THEOREMA XXII.

§. 381. Incidat lumen in chartam albam ED ſecundum directionem parallelam LD. Tabula vitrea AB ita inclinetur, ut lumen per CE reflexum, & per CD refractum ſpatia chartae EA, AD aeque illuminet. Similibus vero hic opus eſt cautelis, quibus in experimento nono utendum fuit. Iam dico lumen reflexum eſſe ad refractum ut AE ad AD, ſiue eſſe Fig. 37.

$M : N = AE : AD.$

Quodſi ergo vitrum ſucceſſiue ita inclinetur, luminisque poſitio vel poſitio chartae debite mutetur, ut non modo obtineat illuminationis ſpatiorum AE, AD aequalitas, verum & ratio inter rectas AE, AD ea ſit, quae vi praecedentis tabellae (§. 380.) cuilibet angulorum *A*, *B*, *C*, *D* &c. debetur. Anguli incidentiae LBC iſtis ipſis angulis *A*, *B*, *C*, *D* &c. erunt

aequales, ut adeo illis menſuratis hi innoteſcant.

DEMONSTRATIO.

Ob radios parallelos, erit illuminatio directe ut eorum, numerus reciproce ut ſpatium in quod incidunt. At dicto numero radiorum in vitrum CA incidentium $=1$, numerus eorum, qui in ſpatium FA reflectuntur, erit $=M$, qui in ſpatium AD refringuntur $=N$. Unde erit claritas ſpatii EA $= M$: EA, ſpatii AD vero $= N$: AD. At vero utraque in experimento facta eſt aequalis, quare habetur

$$\frac{M}{EA} = \frac{N}{ED}$$

ſiue

$$M : N = EA : ED.$$

Quod erat demonſtrandum.

§. 382. Operoſius eſt hoc experimentum, cum duo ſimul anguli, incidentiae nempe & inclinationis determinandi ſint. Quare iuuabit utriusque rationem determinare. Sit ergo AC$=1$, angulus incidentiae BCL $=$ECA$=$ ACD$=b$, angulus inclinationis CAE $= c$, erit

$$EA : \sin b = 1 : \sin (b+c)$$
$$AD : \sin b = 1 : \sin (c-b)$$
$$EA : AD = \sin (c-b) : \sin (c+b)$$

At in experimento noſtro debet eſſe

$$EA : AD = M : N$$

Quare erit

$$M : N = \sin(c-b) : \sin (c+b)$$

Unde

Unde fit

$$\text{tang } c = \frac{M+N}{N-M} \text{ tang } b$$

§. 383. Quodsi debeat esse $M=N$, ut in experimento IX (§. 332.) erit

$$\text{tang } c = \frac{2M.}{0} \text{ tang } b = \text{infinit.}$$

Hoc ergo casu angulus CAE necessario rectus esse debet.

§. 384. Porro vidimus datis quantitatibus M, N datos respondere angulos incidentiae b, adeoque simul definitus est angulus inclinationis c. Ut adeo alter ab altero necessario pendeat. At cum independenter ab omni alio experimento neuter eorum seorsim detur, patet utrumque simul tentando esse quaerendum, & formula eruta eatenus tantum usui erit, quatenus facilius absoluitur tentamen.

§. 385. Ut ergo operosius est hoc experimentum, ubi quaeruntur anguli *A*, *B*, *C* &c. ita contra facilius erit, si quaeratur ratio inter quantitates M, N, pro dato quolibet angulo incidentiae LCB. Hinc factum est, ut unicum tantum experimentum sumerem, quo esse debebat EA : AD $= M : N = 1 : 2$. atque angulum LCB inueni fuisse $= 22\frac{1}{2}$gr, qui ergo proxime coincidit cum eo valore, quem in experimento praecedenti pro angulo secundo *B* inueni. Est vero ob

$$M + N = 1.$$

&

$$M : N = 1 : 2.$$

$$M = \tfrac{1}{3}, \; N = \tfrac{2}{3}.$$

 quod

quod etiam esse debet. (§.368.) Idem experimentum institui posse, pluribus adhibitis vitris, ita est euidens, ut ipsi diutius immorari non opus sit. Videamus iam, quomodo determinentur quantitates *q*, *p*. pro angulis *A*, *B*, *C*, *D* &c.

EXPERIMENTVM XV.

§. 386. Chartae albae AD verticaliter im-
Fig. 38. posui tabulam vitream AB, ut lumen secundum directionem parallelam LE incidens reflecteret in AH. Iuxta hanc tabulam inclinaui prisma vitreum AC, quod lumen secundum eandem directionem LF incidens reflecteret in AG, spatiumque AG aeque illuminaret ac spatium HA illuminabatur a tabula vitrea AB. Dedi vero operam ut in utrumque hoc spatium nullum incideret lumen alienum, aut saltem si quod incideret hoc maxime esse tenue. Quo facto dimensus sum angulos incidentiae LEB, LFC & rectas EH, AG, & experimento bis iterato inueni fuisse in

	Exper. I.	Exper. II.
AE - - -	= 1 - - - -	= 1.
AH - - -	= 0,90 - -	= 2,10
AG - - -	= 0,67 - -	= 1,02
Ang CAE - -	= 15°. - - -	= 19°.
LEB - -	= 42°	= 65°.
LFG - - -	= 27° - - -	= 46°.

§. 387. At iam per utrumque experimentum praecedens, siue quod eodem recidit per tabulas §. §. 368. 379. datur quantitas luminis a plano vitreo AB reflexi, quod in toto hoc

hoc capite & in sequenti denotat litera *M*. Porro quantitatem luminis in spatia tabulae vitreae & prismatis AE, AF incidentis, cum aequalis sit, designauimus per unitatem. Quo posito vel per se est euidens, quantitatem luminis a prismate reflexam esse eam, quam supra per *q* expressimus. Erit ergo

$$\text{claritas spatii } AG = \frac{q}{AG}$$

$$\text{spatii } AH = \frac{M}{AH}$$

Cum vero experimento utraque sit aequalis erit

$$\frac{q}{AG} = \frac{M}{AH}$$

adeoque

$$q = \frac{M.\ AG}{AH}$$

§. 288. Sed in experimento priori angulus incidentiae LEB = 42°. cadit intra angulos (§. 379. 368.)

$F = 39°$ sub quo est $M = \frac{1}{7}$
$G = 43°$ - - - - - - $= \frac{1}{8}$

Sumto ergo parte proportionali, quod hic utique facere licet, erit pro angulo LEB = 42°,

$$M = \tfrac{1}{8} \div \tfrac{1}{224} = 0{,}12054$$

adeoque ob

$$q = \frac{M.AG}{AH} = \frac{67.M}{90}$$

erit

$q = 0{,}08972.$

quae ergo eſt quantitas luminis a ſuperficie priſmatis exteriore ſub angulo LFC$=27°$ reflexi. Cum hic angulus ſit angulus *C*, quantitas *q*, quam inter limites mediam eſſe ſupra vidimus (§. 375.) eſt $= \frac{4}{49} = 0{,}08163$. quae adeo ab inuenta vera tantum differt parte 0,00809. ſiue undecima circiter parte. Ut ergo vera quam hic invenimus non modo extra limites non euagetur, verum & parum abſit quin in medium cadat (§. 376.)

§. 389. Porro cum in eodem hoc experimento ſit angulus LFC$=27° =$ ang. *C*, erit pro hoc angulo $M = \frac{1}{4}$ (§. 379. 368.) Sed in genere eſt (§. 349.)

$$M = \frac{q+p}{1+p}$$

ſiue

$$p = \frac{M-q}{1-M}$$

Unde ſubſtitutis valoribus

$$q = 0{,}08972$$
$$M = 0{,}25$$

habetur

$$p = 0{,}21370.$$

Quae ergo eſt quantitas luminis a ſuperficie vitri interna reflexa, ſub eo angulo, qui angulo $C = 27°$ reſpondet. At ſupra inuenimus eſſe quantitatem mediam (§. 375.)

$$p = \frac{11}{49} = 0{,}22449.$$

Differt adeo parte $= 0{,}01079$, ſiue circiter $\frac{1}{22}$ & quae utique eſt contemnenda. Ut adeo hinc pateat, quantum quantitates iſtae mediae veris ſint vicinae.

§. 390. In experimento secundo erat angulus BEL $= 65°$, cui respondere obseruaui $M = \frac{1}{13}$, adeoque $q = M.AG : AH$, $AG = 1{,}02$, $AH = 2{,}10$, erat $q = \frac{1}{13} \cdot \frac{102}{210} = 0{,}03736$. Quae ergo est quantitas luminis a superficie prismatis exteriore sub angulo LFC $= 46°$ reflexi. At hic angulus proxime est angulus H (§. 379.) cui ergo cum respondeat quantitas media (§. 375.)

$$q = \tfrac{9}{289} = 0{,}03114.$$

differentia erit $= 0{,}00622$, siue sexta circiter pars ipsius q. Ut ergo, etsi angulus LFC non exacte sit $= H$, nilominus differentia ista satis sit exigua, eoque magis contemnenda, quo difficilior est determinatio quantitatis M angulis maioribus respondens, qualis in hoc casu est angulus LEB.

§. 391. Porro cum angulus LFC proxime sit $=$ angulo H, ipsi respondebit $M = \frac{1}{9}$, adeoque ob

$$p = \frac{M - q}{1 - M}$$

erit

$$q = 0{,}03736$$

$$p = 0{,}08297.$$

Sed eadem quantitas inter limites media (§. 375.) est

$$p = \tfrac{26}{289} = 0{,}08997$$

Unde differentia $= 0{,}007$ est circiter duodecima pars ipsius p. Ut adeo & hic sit paruitatis contemnendae.

EX-

EXPERIMENTVM XVI.

Fig. 39. § 392. Experimentum praecedens, iisdem usus cautelis, ita instauraui, ut non modo prisma AC, verum & ipsam tabulam vitream AB ad planum chartae albae AD inclinarem, eumque utriusque quaererem situm, ut lumen secundum directionem LFE in utriusque superficiem incidens, atque in spatia chartae AH, AG reflexum, spatia ista aeque illuminaret. Quo facto inueni fuisse

AE = 1	ang. BAD = 57°
AG = 0,47	LEB = 25
AH = 0,42	LFC = $13\frac{1}{2}$
	FAC = $11\frac{1}{2}$

§. 393. Est vero sub angulo (§. 368. 379.)

$$B = 22° \ldots\ldots M = \tfrac{1}{3}$$
$$C = 27° \ldots\ldots M = \tfrac{1}{4}$$

adeoque sub angulo

$$\text{LEB} = 25° \ldots M = 0{,}28333.$$

Unde ob

$$q = \frac{M.\ \text{AG}}{\text{AH}}$$
$$\text{AG} = 0{,}47$$
$$\text{AH} = 0{,}42$$

erit

$$q = 0{,}31706.$$

quae ergo quantitas respondet angulo LFC = $13\frac{1}{2}$gr. At quaerendo partem proportionalem pro hoc angulo inuenitur quantitas inter limites media (§. 375.)

$$q = 0{,}26103.$$

Dif-

Differentia ergo eſt $=0,05603$. Quae etſi valde ſit notabilis, attamen limites praefinitos non excedit.

§. 394. Similiter pro angulo LFC $=13\frac{1}{2}^{o}$, erit proxime

$M=0,52222$. adeoque ob

$$p=\frac{M-q}{1-M}$$

erit

$$p=0,54657.$$

At eadem quantitas inter limites media (§.375) proxime eſt

$$p=0,58696$$

Unde differentia $=0,04039$ eſt circiter $\frac{1}{14}$ ipſius p.

§. 395. Plura experimenta non ſumſi, cum admodum ſint operoſa & difficilius inſtituantur. Videamus iam, quale ſingulis ſtatuendum ſit pretium. Cum in experimento IX°, & quod ipſi plane ſimile eſt, eodemque tendit, XIII° facillime dignoſcatur aequalitas claritatis utriuſque imaginis (§. 332. 377.) utrumque variatis quoque ſingulis circumſtantiis pluries inſtauraui, ut adeo anguli *A*, *B*, *C*, *D* &c. qui experimentis iſtis determinantur (§. 379.) non poſſint non eſſe veris proximi, ut ſi quae adeſt differentia, dimidium gradum iſta excedere nequeat.

§. 396. Ut tamen & in his medium quoddam inter aberrationes iſtas ſumere liceret, ſequenti uſus ſum methodo, quae plurimis aliis quoque caſibus adplicari poterit. Vidimus vero ſupra (§. 380.) angulis *A*, *B*, *C*, *D* &c. Fig.40.

reſpon-

reſpondere lumen reflexum $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$ &c. Ducta ergo in charta maiori recta AZ, hanc feci $=\frac{1}{2}$, atque in iſta abſcidi partes ZB$=\frac{1}{3}$, ZC $=\frac{1}{4}$, ZD$=\frac{1}{5}$, ZE$=\frac{1}{6}$ &c.; ut adeo partes iſtae abſciſſae eſſent in ratione luminis ſub angulis *A*, *B*, *C*, *D* &c. reflexi. Erecta porro in Z normali ZV, hanc ita in partes aequales diviſi, ut initium Z reſponderet gradui $14\frac{1}{2}$, veluti in ipſa figura videre eſt. Quo facto, atque ductis ordinatis Bb, Cc, Dd &c. has ita determinaui, ut puncta b, c, d, e &c. reſponderent numero graduum angulorum *B*, *C*, *D*, *E*, *F* &c. ſiue quod idem eſt, exceſſum iſtorum angulorum ſupra angulum primum A denotarent. At iam vel per ſe euidens eſt, ſingula iſta puncta A, b, c, d, e &c. debere eſſe in curua admodum regulari, ſimulac rite determinati ſint anguli *A*, *B*, *C*, *D* &c. ſin vero minus, puncta iſta non poterunt non extra curuam iacere. Etſi vero utique dentur caſus, quibus eiuſmodi curua reipſa habet plures vel pauciores flexus ſinuoſos, hi tamen latere nequeunt, ſimulac puncta iſta ſibi ſatis ſint vicina, atque experimenta curatius fuerint ſumta. Hoc quippe caſu & puncta iſta, etſi non penitus exacta fuerit eorum poſitio, nilominus flexus iſtos aperte affectabunt. Pluribus quoque caſibus ex ipſa rei natura eiuſmodi flexus adeſſe debere, haud difficulter colligitur. Quod idem & in noſtro exemplo locum habuiſſet, ſi partes abſciſſae AB, BC, CD, DE &c. aſſumtae fuiſſent aequales. Cum vero conducat ita rem peragere ut curua euadat ſimpliciſſima, quae dari poteſt, probe diſpiciendum erit, quales ſumere

ſumere conueniat abſciſſas, qualeſque ordinatas.

§. 397. Determinata iam punctorum obſeruatorum A, b, c, d &c. poſitione, eorum bina Ac, bd, ce &c. recta connexui, ut viderem quantum intermedia b, c, d &c. a recta iſta diſtarent, & in quamnam partem rectae caderent. Quodſi enim ducta v. gr. recta Ac punctum intermedium, quod intra eam & axin AZ cadere deberet, extra eam cecidiſſet, ilico falſi & erronei quid adeſſe apertiſſime patuiſſet. Cum vero tantam anomaliam non adeſſe viderem, curuam Ai ita duxi, ut eſſet quam maxime ſibi ipſi ſimilis, atque puncta ea, quae nimis aberrabant, utrinque relinqueret.

§. 398. Utique in his ſaniori criſi opus eſſe non eſt inficiandum. Sic v. gr. ſupra iam notauimus (§. 378.) angulos incidentiae maiores *G*, *H*, *I* &c. experimentis difficilius determinari. Unde factum eſt, ut aberrationes maiores in puncta f, g, h, i coniicerem, cum viderem iſta cum prioribus a, b, c &c. minus conſpirare. Ut porro examinare poſſem, an curua A i manu ducta ſibi conſtaret, vel an quibuſdam in locis veluti angulata eſſet, id ſimili fere modo peregi, quo vulgo explorant oculis, an recta ſit regula nec ne? Ut enim in hoc caſu puncta regulae extrema media obtegere vel obumbrare debent, ſic & cuiuslibet partis curuae b c, puncta quae extrema inter iacent, uniformi modo a recta bc recedere debere per ſe eſt euidens.

§. 399.

§. 399. His ita peractis sequentes inueni angulos *A*, *B*, *C* &c. quos medios vocare licebit.

$A = 14° 30'$	$F = 38° 54'$
$B = 22° 0'$	$G = 42° 58'$
$C = 27° 8'$	$H = 47° 2'$
$D = 31° 10'$	$I = 50° 41'$
$E = 34° 54'$	

Utrumque angulum *A* & *B* intactum reliqui, cum eos ceteris exactiores esse scirem. Ceteros si cum iis quos experimenta dederunt compares, eos parum discrepare inuenies, ultimo saltem excepto, qui necessario maior esse debet.

§. 400. Cum vero iam hoc modo duxissem curuam, quaesiui abscissas siue quantitates *M*, quae singulis quinis gradibus, a 15° ad 50mum usque responderent; atque inueni esse pro

ang. incid.	lumen reflexum *M*	ang. incid.	lumen reflexum *M*
- 15°	- 0,483	35° - -	0,165
- 20	- 0,367	40 - -	0,136
- 25	- 0,279	45 - -	0,115
- 30	- 0,210	50 - -	0, 98

Similes numeri ex utraque tabella §. 379. 380. erui potuissent partem proportionalem quaerendo, at mea quidem sententia hi, quos hic sistimus exactiores sunt.

§. 401. At vero de his numeris idem monendum est, quod supra de medio arithmetico notauimus (§. 275. 279. 283.) Simulac enim aberrationes punctorum A, b, c, d &c. a defectu

fectu instrumentorum pendent, hac ratione tantum detegetur defectus medius, quippe qui cunctis adhuc inhaerebit. Ceterum eiusmodi defectus in experimerimentis, ex quibus isti numeri deducti sunt, minus est metuendus, singula enim variatis circumstantiis fuerunt repetita (§. 332. 377.)

§. 402. Maioris momenti est quaestio; *an lumen sub dato angulo incidentiae reflexum M sit ad lumen sub eodem angulo refractum N in ratione constanti, quaecunque sit vitri pelluciditas?* Etsi enim experimentis IX° & XIII° constare videatur, quaestionem hanc esse affirmandam, cum & variis adhibitis vitris iidem tamen prodierint anguli *A*, *B*, *C* &c. attamen, quod non inficiandum est, utique dubium hic remanet. Potuisset enim in istis experimentis adesse differentia claritatis, quae oculi aciei sese subduceret, ut adeo tantum ad sensum constans esset ista ratio, nequaquam geometrio rigore.

§. 403. Sit ergo BGO vitrum minus pellucidum, radiosque dispergens, intra quod radius luminis AB eo modo reflectatur, quo eum reflecti supra (§. 339.) vidimus, atque euidens est, dum lumen successiue percurrit rectas BC, CD, DE &c continuo partem eius dispergi, quae lumini residuo est proportionalis. Sit ergo lumen quod est in B ad illud quod in C incidit ut 1 ad λ, patet claritatem imaginum B, C, D, E, F &c. successiue fore q, $n\lambda m$, $nmp\lambda^2$, $nm\lambda^3p^2$, $nm\lambda^4p^3$ &c. adeoque Fig. 34.

$$M = q + nmp\lambda^2 + nmp^3\lambda^4 + nmp^5\lambda^6 \pm \&c.$$
$$N = nm\lambda + nmp^2\lambda^3 + nmp^4\lambda^5 + \&c.$$

siue

$$M = q + \frac{nm\lambda^2 p}{1 - \lambda^2 p^2}$$
$$N = \frac{nm\lambda}{1 - p^2\lambda^2}$$

unde &

$$M = \lambda p N + q.$$

Quae ergo est relatio inter lumen a vitro minus pellucido reflexum & refractum.

§. 404. At iam in Experimento IX. inuenimus sub angulo incidentiae $A = 14\frac{1}{2}$gr. esse $M = N$, quare erit

$$M = q + \lambda p M$$

unde

$$M = \frac{q}{1 - \lambda p}$$

§. 405. Pro vitris nullum lumen dispergentibus est $\lambda = 1$, unde

$$M = \frac{q}{1 - p}$$

Cum vero sit $\lambda < 1$, simul ac vitrum fuerit minus pellucidum, erit quoque

$$1 - \lambda p > 1 - p$$

adeoque

$$\frac{q}{1 - \lambda p} < \frac{q}{1 - p}$$

Quare manente in utroque casu quantitate q, utique quantitas luminis a vitro minus pellucido reflexi & refracti minor erit ea, quam vitrum perfecte pellucidum reflectit & refringit.

At ſub angulo incidentiae *A* utraque aeque minuitur, cum ſit $M = N$.

§. 406. Quaeſtio vero ad hoc reducitur, ut definiatur, quodnam decrementum capiat lumen in experimentis ſupra deſcriptis, dum in vitro percurrit rectam BC, quae vix erat unius lineae digiti pariſini. Admodum vero exiguum eſſe hoc decrementum vel per ſe patet, niſi data opera adhibeantur vitra impuriora vel encauſto tincta. Mea quidem ſententia & in vitris mediocriter pellucidis vix ad centeſimam luminis partem excurret. Ponendo itaque $\lambda = 1 - \frac{1}{100}$, erit

$$M = q + pN + \tfrac{1}{100} pN$$

Cum vero q ſit quantitas poſitiua & ſub angulis incidentiae minoribus ſatis notabilis, erit

$$q + pN > q + pN - \tfrac{1}{100} pN$$

ut adeo decrementum, quod lumen reflexum M capit a minori vitri pelluciditate, parte ſua centeſima longe ſit minus, meritoque ergo contemnendum. Sermo vero hic eſt de eo decremento, quod lumini reflexo proprium eſt, atque rationem $M : N$ variam reddere valet. Etenim praeter hoc utrumque lumen $M : N$ inſuper decrementum capit, quod utrique eſt commune.

§. 407. Quodſi iam haec cum limitibus conferamus, intra quos vagum eſſe vidimus oculi iudicium (§. 265. ſeqq.) facile patebit, variationem inter rationem $M : N$ vel decuplo eſſe poſſe maiorem, antequam ab oculo detegatur differentia. Ut adeo non mirum ſit, in experimentis ſupra traditis eosdem con-

 ſtan-

ſtanter angulos *A*, *B*, *C*, &c prodiiſſe, etſi pro vitris minus pellucidis aliquanto eſſe debuiſſent maiores.

§. 408. Ponamus iam $\lambda = 1 - x$ atque x erit quantitas adeo parua, ut eius dignitates ſuperiores reiici poſſint. Quare facta ſubſtitutione in formulis §. 403. erit proxime

$$M = q + \frac{nmp - 2nmxp}{1 - pp + 2ppx}$$

$$N = \frac{nm - nmx}{1 - pp + 2ppx}$$

Unde porro fit

$$N : M = \frac{nm - nmx}{q - ppq + nmp + (2ppq - 2nmp)x}$$

ſiue diuiſione actu inſtituta, reiectisque iterum poteſtatibus x^2, x^3 &c

$$N : M = \frac{nm}{q - pp + mnp} - \frac{nmx(ppq + q - nmp)}{(q - pp + nmp)^2}$$

Huius aequationis membrum primum ſolum obtinet, ubi vitrum fuerit perfecte pellucidum. Membrum ſecundum indicat, quantum minuatur ratio inter lumen refractum & reflexum, ſi vitrum minus fuerit pellucidum. Patet vero hoc caſu lumen refractum aliquanto magis debilitari quam reflexum.

§. 409. Ut vero hanc formulam rudiori ſaltem exemplo illuſtremus, vidimus ſupra pro angulo *A* eſſe proxime $q = \frac{1}{4}$, $p = \frac{1}{2}$ (§. 393. 394.) unde $n = \frac{3}{4}$, $m = \frac{1}{2}$ his valoribus ſubſtitutis erit

$$N : M = 1 - \frac{1}{3}x.$$

Cum ergo x ſit vix $\frac{1}{50}$, patet in caſu perfectae pelluciditatis fore $N : M = 1$. pro vitris minus pellucidis, qualia in ſuperioribus experimentis

tis adhibui, $N : M = 1 - \frac{1}{150}$. Ut adeo differentia non modo sit nihil facienda, verum & contemni adhuc posset, si vitri pelluciditas vel decies maior fuisset. Porro, quod ex tabella §. 400. patet, quantitas M sub angulis minoribus adeo celeriter decrescit, ut etsi pro $N : M = 1$, substitueretur $N : M = 1 - \frac{1}{20}$, attamen differentia inter angulos vix dimidio gradui foret aequalis. Est enim

pro angulo $14\frac{1}{2}°$ $N : M = 1$.

pro angulo $15°$ $N : M = \frac{0{,}517}{0{,}483} = 1{,}05$.

Unde differentia $= 0{,}05 = \frac{1}{20}$. At quiuis facile concedet, vitrum maxime esse debere impurum, si lumen, dum in ipso spatium unius lineae pedis parisini percurrit, vigesima sua parte minuatur.

§. 410. Ex dictis ergo abunde elucescit, angulos A, B, C, D &c supra inuentos, ab iis, qui locum habent in casu perfectae pelluciditatis, adeo parum differre, ut si quae adest differentia, haec tam parua sit, quae iure contemni mereatur.

§. 411. Sic quoque pro angulo H assumendo (§. 390. 391)

$q = 0{,}03736$ unde $n = 0{,}96264$

inueni $p = 0{,}08297$ $m = 0{,}91703$

$N : M = 8 . (1 + 0{,}314 x)$

Differentia igitur, quae pro angulo $H = 47°$, inter vitra diuersae pelluciditatis obtinet, prorsus similis est illi quam pro angulo A longe minori inuenimus. Ut adeo tuto ad omnes an-

angulos extendatur ſententia, eos nempe parum fore diuerſos, niſi data opera ſumantur vitra ob impuritatem fere opaca.

§. 412. Dubium ergo illud, quod remanere poterat, an anguli *A*, *B*, *C*, *D* &c. quos adhibitis vitris minus pellucidis definiuimus iidem ſint, qui prodirent, ſi vitris perfecte pellucidis uti a natura conceſſum eſſet, ita ſolutum eſſe cenſeo, ut iam conſtet, differentiam, quae inter iſtos adeſſe poteſt, adeo eſſe exiguam, ut aberrationes, quibus obnoxia ſunt experimenta, longe poſſint eſſe maiores. Superfluum itaque eſſe duco, diutius in iſtam inquirere, cum & pellucidiſſimis adhibitis vitris, exactius definiri non poſſint.

§. 413. Experimenta XVtum & XVItum parcius inſtitui, eaque ſupra (386. ſeqq.) ita perluſtraui, quaſi oſtendiſſe ſufficeret, quantitates *q*, *p*, quae per experimenta iſta determinantur, intra praefinitos limites cadere (§. 374.) atque ab iis, quae inter limites iſtos medium tenent (§. 375.) adeo parum diſcrepare, ut differentia errore, qui in iudicio oculi obtinere poteſt, minor ſit. Rationem, quam ob rem ſic egerim, iam ſupra reddidi (§. 376. 395.) Pluris enim facio quantitates *M*, *N*, *P*, *Q* &c. cum unico experimento eoque faciliori ſaepiusque repetito ſint definitae. Contra ea quantitates *q*, *p*, non modo a pluribus experimentis pendent, verum & ipſa haec experimenta incertiora ſunt, cum una eademque tabula vitrea non ſufficiat, ſed ipſi priſma vitreum ſuperaddendum ſit. Dubium vero eſt, an utrique eadem ſit vis reflectens.

ctens potiſſimum ſi puluiſculos & bullulas ſpectes, quae utriusque ſuperficiei diuerſa copia inhaerere poſſunt. Experimentis vero edoctus ſum, haud contemnendam hinc emergere poſſe differentiam. Dedi tamen operam ut in experimentis, quae ſupra deſcripſi, differentiam iſtam, quantum in me erat, minuerem.

§. 414. Porro cuiuis facile obuium eſt, quantitates q, p, iam ineſſe quantitatibus M, N, P, Q &c. exactius definitis. Quodſi ergo quis ex theoria, quam ſibi finxit, formulas deducat, quibus definitur ratio inter quantitates q, p, & angulos, ſub quibus lumen ex aere in vitrum incidit, facile ipſi erit ope aequationum (§. 349.)

$$N = \frac{1-q}{1+p}$$

$$M = \frac{q+p}{1+p}$$

determinare, an quantitates M, N inueniat eſſe eas, quas angulis A, B, C, D &c. reſpondere ſupra oſtendimus.

§. 415. At ſi unquam defectu quodam laborat theoria luminis, hoc certe caſu iſte, totus quantus eſt, ſeſe prodit. Fruſtra me in perquirendis eiusmodi formulis deſudaſſe, variasque incaſſum tentaſſe non inficior. Neque diffiteor, eam, in quam tandem incidi, quamque iam exponam, admodum eſſe precariam, etſi cum experimentis ita congruat, ut tuto adhiberi poſſit, donec ea inueniatur, quae vera eſt. Lectoris igitur arbitrio hypo-

thesin, quam inueni, plane committo, viam tamen, quae ad istam me conduxit, aperiam.

§. 416. Primo quidem *legem continuitatis* non adeo a natura abhorrere assumo, ut reflexio luminis eiusque refractio fieri in instanti censenda sit. Angulum geometrico rigore acutum vel obtusum in rerum natura aut nunquam aut saltem rarissime occurrere facile concessum iri confido. Quodsi enim uspiam huiuscemodi angulus occurrat, necesse esse videtur, ut simul alia quantitas, quae calculum ingreditur euanescat, vel infinite parua euadat. Sic v. gr. in reflexione corporum in obicem proiectorum euanescere pono celeritatem relatiuam, quod vel inde euidens esse videtur, quod celeritas negatiua euadit.

§. 417. Quatenus lumen in superficiem diaphanam incidens ab ea refringitur, celeritas quidem mutatur, at non euanescit. Hanc vero celeritatis mutationem successiuam esse, admissa lege continuitatis, necessarium est.
Fig. 41. Ut adeo lumen secundum directionem DC in superficiem AB incidens, paullatim a via DC defectat, atque curuam DFE percurrendo in medium densius E ingrediatur. Rectae CD, CE erunt curuae istius tangentes.

§. 418. Porro, quod experimentis abunde constat, *reflexio luminis latius patet, quam eius refractio*, id est, dantur casus, quibus lumen omne reflectitur, nullum vero refringitur, at nulli dantur, quibus omne lumen refringeretur.

§ 419. Concipiendum itaque videtur ab utraque parte superficiei media diaphana dirimen-

rimentis AB certum ſpatium parallelis HI, KL Fig. 42.
terminatum, intra quod via luminis CD ſucceſſiue incuruatur, tandemque emenſo iſto ſpatio CFE, per tangentem EG pergat.

§. 420. Eodem modo ſimile ſpatium HIKL concipiendum erit, intra quod lumen ſucceſſiue reflectitur. At vero ſupra vidimus, reflexionem luminis non deberi particulis heterogeneis ſiue minus diaphanis, quippe quibus tantum debetur luminis diſperſio, ſed vim reflectentem ideo adeſſe, quia adeſt vis refringens (§. 327. 328. ſeqq.). An vero utraque ab eadem procedat cauſſa nec ne, liquido nondum conſtat.

§. 421. Qualeſcunque autem ſint iſtae vires, eas reuera adeſſe, nemo facile negabit. Etſi enim plerumque vim reflectentem a refringente ita diſtinguant, ut hanc ceu maxime realem materiae cuidam tribuant, vel vi corporis attrahenti, quae actu lumen a via ſua deflectat, illam vero inertiae cuidam vel reſiſtentiae deberi contendant, hoc tamen perinde erit, quippe & inertiae vim tribui ubique vides, eius ſaltem eam ſuſtinere vicem in aprico eſt.

§. 422. Eo vero vinculo teneri utramque iſtam vim, ut una ſeſe exſerant, vel inde euidens eſſe puto, quod utraque & in corporibus perfecte pellucidis adſit (§. 330. 337.) Unde infero, utramque in ſingulis curuae CFE punctis una adeſſe.

§. 423. Porro cum corpora perfecte diaphana homogenea eſſe aſſumendum ſit, ponere licebit, utramque iſtam vim in eodem ſtra-

to MN esse constantem, in diuersis vero stratis diuersam. Etsi vero lex ea, qua in singulis stratis intenditur aut remittitur non innotescat, nilominus concedendum erit, utramque istam vim quocunque demum modo pendere ab obliquitate incidentiae. Hoc enim valere de summa luminis a cunctis istis stratis reflexi & refracti, quam supra per literas q, n, p, m expressimus, experimentis in antecedentibus iam est stabilitum, unde idem quoque de singulis stratis seorsim obtinere dubio caret.

§. 424. Simili modo lumen successiue reflectitur & refringitur, dum e medio densiori G in rarius D incidit. At hoc casu quantitas luminis reflexi maior est. Experimentis enim, quibus supra quantitates q, p pro quibusdam saltem angulis definiuimus (§. 386.) constat esse $p > q$. Caussa huius phaenomeni plane adhuc latet.

§. 425. Ut tamen rem tot tantisque tenebris inuolutam nihilominus calculo prosequamur, hunc ita instruemus. Sit ABLC spatium, Fig.43. in quo fit luminis reflexio & refractio. Lumen per EF incidens percurrat curuam FMA, atque deinde pergat per tangentem AI. Quaeritur iam quantitas quae reflectitur, dum percurrit spatiolum Mm.

§. 426. Utcunque vero lumen a recto tramite deflectatur, ratio inter sinus inclinationis & refractionis pro eodem strato constans erit, pro diuersis stratis diuersa assumenda est. (§. 423.) Quo posito, omnes isti sinus ad sinum inclinationis primum HFE constantem seruant rationem, quicunque fuerit angulus inci-

incidentiae FFL. Quod demonstratum dedi in Tractatu *Les proprietés remarquables de la route de la lumiere par les airs*, superiori anno *Hagae Comitum* excuso. Referat itaque curua LVM istam rationem, ut sit

$$\sin HFE : \sin mM\mu = FL : QV$$

Dicatur porro $FL = 1$, $QV = z$, $FP = QM = y$, $FQ = x$, $Qq = dx$, $m\mu = dy$. $HFE = \gamma$, erit

$$\sin mM\mu = dy : \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$$

adeoque

$$\frac{dy}{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}} = z.\ \sin\gamma.$$

§. 427. Porro dicatur lumen in F incidens $= 1$, quod residuum est, dum in M peruenit, vocetur $= v$, erit quantitas, quae in spatiolo Mm amittitur $= dv$, quae ergo est definienda.

§. 428. Patet vero eam eo fore maiorem, quo maior est ipsa quantitas in M incidens v, quoque maior est vis reflectens, siue utcunque eam nominare volueris, resistens, repercutiens, transitum denegans &c. Hanc vim referant ordinatae QN curuae DB, atque ponamus $QN = k$. Erit ergo hoc respectu

$$-dv \backsim kv$$

§. 429. Porro utique eo maior est quantitas v, quo maius est spatiolum percursum $Mm = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, unde fiet

$$-dv \backsim kv\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$$

§. 430. At vero quantitas ista quoque pendet ab obliquitate incidentiae. Qua autem ratione hoc respectu minuatur difficillime definietur. Ego quidem ut formulam eruendam experimentis adcommodare possem, inueni,

quan-

quantitatem istam statuendam esse in ratione reciproca sinus anguli incidentiae Mmμ, siue directe in ratione secantis anguli inclinationis mMμ. Quod si hoc ideo obtinere statuere velis, quod manente radiorum latitudine, numerus obstaculorum crescat ut secans anguli inclinationis, id per me licebit, hypothesin, quam assumis, demonstrare nequeo. Interim ut aequatio eruenda experimentis respondeat, ponemus

$$-dv \backsim 1 : \sin Mm\mu.$$

ut tandem fiat

$$-dv = vk \surd(dx^2 + dy^2) : \sin Mm\mu$$

siue ob

$$\sin Mm\mu = dx : \surd(dx^2 + dy^2)$$

euadat

$$-\frac{dv}{v} = \frac{k(dx^2 + dy^2)}{dx}$$

§. 431. Sed vidimus esse (§. 426.)

$$\frac{dy}{\surd(dx^2 + dy^2)} = z \sin \gamma.$$

Unde substitutione facta prodit

$$-\frac{dv}{v} = \frac{kdx}{1 - zz \sin \gamma^2}$$

Quae aequatio facili substitutione facta abit in sequentem

$$-\frac{dv}{v} = \frac{kdx . \operatorname{cosec} \gamma^2}{\cot \gamma^2 + (1 - zz)}$$

siue ponendo breuitatis ergo $1 - zz = \zeta\zeta$, resoluetur in seriem

$$-\frac{dv}{v} = \frac{kdx}{\sin \gamma^2} \left[\operatorname{tang} \gamma^2 - \zeta^2 . \operatorname{tang} \gamma^4 + \zeta^4 \operatorname{tang} \gamma^6 - \&c. \right]$$

Unde

Unde tandem habetur

$$\log \frac{1}{v} = \sec\gamma^2 \int k dx - \sec\gamma^2 \tan\gamma^2 \int k \zeta^2 dx + \&c.$$

§. 432. Integralia, quae in singulis terminis huius seriei occurrunt, ab angulo inclinationis γ non pendent, singulaque per functionem ipsius x efferri poterunt, quippe per x utraque variabilis k & z est exprimenda. Quodsi ergo iam quaeratur lumen omne reflexum, ponenda erit $x = FG$, atque patet singula ista integralia instar coefficientium haberi posse, cum sumendum sit spatium $\int k dx$, $\int k (1 - zz) dx$, $\int k (1 - zz)^2 dx$, &c. quod integratione instituta ipsi $x = FG$ respondet. Sic. v.gr. erit $\int k dx =$ spatio FGBD, & similia reperientur pro ceteris integratibus.

§. 433. Dicto ergo spatio

$$\int k dx = \alpha$$
$$\int k (1 - zz) dx = \beta$$
$$\int k (1 - zz)^2 dx = \delta$$
&c,

erit

$$\log. \frac{1}{v} = \sec\gamma^2 [\alpha - \beta \tan\gamma^2 + \delta \tan\gamma^4 - \&c]$$

§. 434. Huius seriei coefficientes $\beta, \delta, \varepsilon$ &c. valde decrescunt. Etenim abscissa z cum minima est in G, pro vitro adhuc est $= \frac{2}{3}$, unde $1 - zz$ erit fractio dimidia parte unitatis fere semper minor. Alia porro convergentiae est ratio, simul ac angulus γ fuerit semirecto minor. Tunc enim erit tang. $\gamma < 1$. Hinc fit ut termini primum sequentes plerumque abiici possint, ut adeo tantum remaneat

$$-\log. v = \alpha \sec\gamma^2.$$

Ad

Ad hanc aequationem abſolute reducitur ſeries inuenta ſimulac lumen normaliter incidat. Hoc enim caſu erit tang $\gamma = 0$; cumque etiam ſit ſec $\gamma = 1$, erit breuiſſime

$$-\log v = \alpha.$$

§. 435. Iiſdem inſiſtendo veſtigiis ſimilem formulam habebis pro lumine reflexo, cum e medio denſiore I in rarius E incidit. Cum vero hoc caſu vis reflectens, ſiue quantitas luminis reflexi ſit maior, patet, curuam DNB non eſſe eandem. Unde prodibit ſeries, quam quidem ingreditur ſecans γ, at diuerſi erunt coefficientes.

§. 436. Quodſi via percurſa AF ſtatuatur rectilinea, ſiue quod idem eſt, ſi ponamus, quod NEWTONO magis arridet, lumen reflecti antequam refringatur, faciendum erit $z = 1$, adeoque $1 - zz = 0$. Quo facto in ſerie prima (§. 433.) omnes termini primum ſequentes erunt $= 0$, ut adeo ſimpliciter ſit

$$-\log. v = \alpha (\text{ſec.} \gamma)^2$$

§. 437. At in ſerie altera (§. 435.) minus commode adhibebitur ſec γ, cum ipſi ſubſtituenda videatur ſecans anguli inclinationis radii IA. Haec vero ſubſtitutio experimentis minus ſatisfacit, ſi eadem formula ſit retinenda.

§. 438. Cum vero tota iſta hypotheſis admodum ſit precaria, in eam diutius inquirere ſuperfluum duxi. Quare ſeriei §. 433. terminum primum eundemque ſolum retinendo poſui eſſe

$$-\log v = \alpha\, \text{ſec}\, \gamma^2 = -\log(1-q)$$

&

& pro lumine e vitro in aerem incidente similiter assumsi

$$-\log v = \acute{\alpha} \sec \gamma^2 = -\log(1-p)$$

Quo facto, utramque hanc aequationem cum experimentis supra traditis comparaui, ut determinarentur coefficientes α, $\acute{\alpha}$, atque inueni, adhibendo logarithmos Briggianos, faciendum esse

$$\log(1-q) = -0{,}0087214(\sec.\gamma)^2$$
$$\log(1-p) = -0{,}0199966(\sec.\gamma)^2$$

§. 439. Antequam has aequationes cum experimentis conferamus, sequentia notasse conuenit. Ponamus seriem (§. 433.)

$$-\log v = \log \frac{1}{1-q} = \sec\gamma^2(\alpha - \beta \operatorname{tang}\gamma^2 + \delta \operatorname{tang}\gamma^3 - \&c.)$$

cum ipsa rei natura congruere, euidens est, abiectis terminis primum sequentibus inueniri $\log \frac{1}{1-q}$ debito maiorem. Unde inuenitur q debito maior. Similique modo prodibit p debito maior. Cum vero sit (§. 349.)

$$M = \frac{q+p}{1+p}$$

auctus erit fractionis huius numerator & denominator, at posterior minori ratione augetur, unde quoque per aequationes

$$\log \frac{1}{1-q} = \alpha \sec\gamma^2$$

$$\log. \frac{1}{1-p} = \acute{\alpha} \sec\gamma^2$$

pro-

prodibit quantitas M, quae debito maior est. Porro maior erit iste excessus, quo maior est angulus γ.

§. 440. Haec obtinent, cum coefficiens α is esse ponitur, qui reuera esse debet. Quod si vero ita assumatur, ut formula experimento conueniat, utique debito minor erit. Unde & quantitates q, p, M pro ceteris experimentis siue angulis ex formula deducendae, debito erunt minores, iis tantum casibus exceptis, quibus angulus γ ab angulo recto parum differt. His enim casibus tang γ sinu toto vel unitate multoties maior est. Unde omissis terminis seriei secundum sequentibus, praecipue vero secundo, omittitur quantitas negatiua haud sane contemnenda, ut adeo quantitates q, p, M, nihilominus iterum debito euadant maiores, etsi coefficientes assumti α, δ debito sint minores.

§. 441. En ergo anomalias, quae in aequationibus

$$\log(1-q) = -0{,}0087214.(\sec\gamma)^2$$
$$\log(1-p) = -0{,}0199966.(\sec\gamma)^2$$

occurrere debent, si vera fuerit series ex assumta hypothesi eruta.

§. 442. Ut iam utramque hanc aequationem cum experimentis conferre possem, sumsi complementa angulorum A, B, C, D &c. (§. 379.) sub quibus inuenimus esse $M = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$ &c. (§. 380.) ut totidem haberem angulos inclinationis γ, horumque ope inuenirem $\log(1-q)$, & $\log(1-p)$ atque proinde ipsas quan-

quantitates q, p angulis iſtis reſpondentes. His in formula (§. 349.)

$$M = \frac{q+p}{1-p}$$

ſubſtitutis, elicui quantitates M, quas cum obſeruatis tutiſſime conferri poſſe ſupra monui: (§. 414.) Hinc tandem ſequens; nata eſt tabella.

Ex obſerv:		Ex Calculo			Ex obſerv.	Differentia
Anguli incid.		q	p	M	M	
A	$14\frac{1}{2}$°	0,2741	0,5136	0,5205	0,5000	+ 0,0205
B	22	0,1323	0,2753	0,3204	0,3333	− 0,0130
C	27	0,0928	0,1968	0,2421	0,2500	− 0,0079
D	31	0,0729	0,1566	0,1985	0,2000	− 0,0015
E	35	0,0592	0,1283	0,1663	0,1667	− 0,0004
F	39	0,0494	0,1078	0,1428	0,1429	− 0,0001
G	43	0,0423	0,0925	0,1234	0,1250	− 0,0016
H	47	0,0368	0,0810	0,1091	0,1111	− 0,0020
I	$50\frac{1}{2}$	0,0332	0,0731	0,0991	0,1000	− 0,0009

§. 443. An ergo differentiae, quas exhibet haec tabella cum praefinitis earum ſymptomatibus conſpirent (§. 439. 440.) ſingulaeque ob paruitatem contemni mereantur, quiuis facillime diiudicabit. Porro pro ſingulis denis gradibus ex aequationibus iſtis quaeſiui quantitates q, p, M, N, quas ſequens tabella exhibet

Ang. incid.	q	p	M	N
10°	0,4862	0,7766	0,7108	0,2892
20	0,1578	0,3204	0,3622	0,6378
30	0,0772	0,1653	0,2070	0,7930
40	0,0474	0,1046	0,1376	0,8624
50	0,0337	0,0705	0,0973	0,9027
60	0,0264	0,0585	0,0802	0,9198
70	0,0225	0,0499	0,0690	0,9310
80	0,0203	0,0450	0,0624	0,9376
90	0,0199	0,0448	0,0619	0,9381

Unde videmus lumen q ſub angulo recto a ſuperficie vitri exteriore reflexum eſſe $=0,0199$ ſiue quinquageſimam partem luminis incidentis. Quodſi vero lumen e vitro normaliter incidat in aerem, erit quantitas luminis ab interiore vitri ſuperficie reflexi $p=0,0448$, ſiue $\frac{1}{22}$ luminis incidentis.

§. 444. His ita aſſumtis facile dabitur lumen a pluribus planis vitreis iiſdemque perfecte pellucidis ſub quolibet angulo incidentiae tranſmiſſum & reflexum. Dicto enim vitrorum numero $= x$, erit ut ſupra vidimus (§. 359).

$$\text{lumen reflexum} = X = \frac{xM}{1+(x-1)M}$$

$$\text{tranſmiſſum} = Y = \frac{N}{1-(x-1)N}$$

Sic

Sic v. gr. pro angulo incidentiae recto, est $M = 0,0619$. unde fit

$$X = \frac{x}{15,1535 + x} = 1 - Y$$

Eritque lumen

a vitris	reflexum X	refractum Y
1	0,0619	0,9381
2	0,1166	0,8834
3	0,1652	0,8348
4	0,2088	0,7912
5	0,2481	0.7519
6	0,2836	0,7164
7	0,3158	0,6842
8	0,3455	0,6545
&c	&c	&c

§. 445. Utique hae quantitates, quae vitris perfecte pellucidis respondent, longe ab iis sunt diuersae, quae prodibunt si vitra adhibeantur qualia reipsa sunt, minus nempe pellucida. Sequeretur enim inde, lumen per 15 vitra transmissum, vix ad dimidiam partem incidentis reduci. Videbimus vero infra duo vitra mediocriter pellucida huic decremento producendo iam sufficere. Ut adeo euidens sit, quantum detrimenti patiatur lumen a particulis, a quibus in omnes partes dispergitur.

 CAPVT II.

CAPVT II.

Instaurantur experimenta & calculus pro tabulis vitreis minus diaphanis.

§. 446. Varia iam in superiori Capite occurrunt, quae ad mensuram luminis a vitris minus pellucidis transmissi & reflexi faciunt, quaeque hic, ne bis idem repetendum sit, veluti in summam contrahemus.

1°. Vidimus vitra minus pellucida, quatenus perfecte pellucidis opponuntur, non ea esse, quae partem luminis reflectunt, quippe hoc omnibus commune est, verum ea tantum minus diaphana esse vocanda, quae lumen plus minusue dispergunt, intercipiunt, absorbent. (§. 320. seqq. §. 328. seqq. §. 332. seqq.)

2°. Ut porro in casu perfectae pelluciditatis vidimus esse $M+N=1$, siue lumen reflexum & refractum iunctim sumtum aequale esse incidenti; ita contra ponendum erit $M+N<1$, simulac vitrum minus fuerit diaphanum. Hoc enim casu pars quaedam luminis incidentis dispergitur & absorbetur.

3°. Similiter vidimus, quantitates q, p, quae lumen a superficie vitri exteriore & interiore reflexum referunt, a pelluciditate vitri non pendere (§. 328. seqq.) nisi in ista superficie adsint puluisculi & bullulae lumen intercipientes & dispergentes (§. 323. 413.) Hoc enim casu, quantitates q, p,

q, n, p, m minores euadunt, quam forent, si obstacula ista abessent.

§. 447. Singuli isti vitrorum defectus calculum reddunt prolixissimum. Contra ea experimenta faciliora sunt. Cum enim vitra minus pellucida actu dentur, iis cautelis non opus erit, quibus in praecedentibus utendum fuit, ut ab his vitris ad ea concludere liceret, quae perfecte pellucida esse ponuntur.

§. 448. A calculo ut ordiamur, ad §. 354. & seqq. retrogrediemur, atque recordabimur independenter a vitri pelluciditate esse (§. 357. 358.)

$$\lambda = \varrho + \frac{\nu\nu\varpi}{1-\varpi\varrho}$$

$$x = \frac{\nu\mu}{1-\varpi\varrho}$$

At iam pro vitris minus pellucidis est $\varrho+\nu < 1$, $\varpi+\mu < 1$, unde & $P+Q<1$, $R+S<1$, $T+V<1$ &c. (§. 359.)

Relicto iam, ut supra fecimus (§. 359.) in E Fig. 36. unico vitro, in B successiue ponantur 0, 1, 2, 3, 4 &c. . . . $(x-1)$, ut numerus cunctorum sit, 1, 2, 3, 4. . . . x. erit

$$\varpi = M$$
$$\mu = N$$

atque ponendo successiue

$$\varrho = M, P, R, T, \text{&c.}$$
$$\nu = N, Q, S, V, \text{&c.}$$

substitutione in aequationibus §. 448. facta prodibunt valores λ, μ, vitris 1, 2, 3, 4 &c. debiti, quos sequens sistit tabella, facile ulterius continuanda. Erit nempe lumen

a vitris	reflexum	refractum
1 - -	$M=M$ - -	$N=N$
2 - -	$P=M+\frac{NNM}{1-MM}$ - -	$Q=\frac{N^2}{1-M^2}$
3 - -	$R=P+\frac{Q^2M}{1-MP}$ - -	$S=\frac{QN}{1-MP}$
4 - -	$T=S+\frac{S^2M}{1-MR}$ - -	$V=\frac{SN}{1-MR}$
5 - -	$W=T+\frac{V^2M}{1-MT}$ - -	$X=\frac{VN}{1-MT}$
&c.	&c.	&c.

§. 449. Formulae iſtae facili ſubſtitutione abeunt in ſequentes, ut ſit

$$N=N$$

$$Q=N.\ \frac{N}{1-M^2}$$

$$S=N.\ \frac{N}{1-M^2}\cdot\frac{N}{1-MP}$$

$$V=N.\ \frac{N}{1-M^2}\cdot\frac{N}{1-MP}\ \frac{N}{1-MR}$$

&c.

ſimiliterque

$$M=M$$

$$P=M+\frac{N^2M}{1-M^2}$$

$$R=M+\frac{N^2M}{1-M^2}+\frac{Q^2M}{1-MP}$$

$$T=M+\frac{N^2M}{1-MM}+\frac{Q^2M}{1-MP}+\frac{S^2M}{1-MR}$$

&c.

At

At vero utcunque mutentur, formulae priores ſequentibus ita inhaerent, ut difficulter detur formula generalis, lumen per numerum vitrorum indefinitum refractum & reflexum ſiſtens. Hanc ergo cum directe inde non poſſe deduci viderem, per ambages quaeſiui, ſequentem adhibens methodum, quae plurimis aliis quoque caſibus cum emolumento adhiberi poterit.

§. 450. Reſumendo aequationes univerſales

$$\lambda = \varrho + \frac{\nu\nu\varpi}{1 - \varpi\varrho}$$

$$\varkappa = \frac{\nu\mu}{1 - \varpi\varrho}$$

numerum vitrorum ſuperius poſitorum ſumſi eſſe aequalem numero eorum, quae inferius collocata ſunt, huncque numerum feci $= x$. Unde obtinui

$$\varpi = \varrho$$

$$\nu = \mu$$

atque hinc porro lumen a $2x$ vitris

$$\text{reflexum } \lambda = \varrho + \frac{\mu\mu\varrho}{1 - \varrho\varrho}$$

$$\text{refractum } \varkappa = \frac{\mu\mu}{1 - \varrho\varrho}$$

$$\lambda = \varrho + \varrho\varkappa = \varrho(1 + \varkappa)$$

His ergo formulis, quod hic obiter notamus, facile & quaſi per ſaltum, dato lumine ab x vitris reflexo & refracto, dabitur illud, quod a $2x$, $4x$, $8x$, $16x$ &c vitris reflectitur & refringitur. At uniuerſalius res eſt abſoluenda.

§. 451 Facile vero obuium eſt, problema, quod hic ſoluendum eſt, uniuerſaliſſime ſic ſonare.

Data ratione, quam inter ſe ſeruant ordinatae cuiuſdam curuae, abſciſſae ſimplae & duplae reſpondentes, inuenire aequationem ad iſtam curuam ſiue generalius. *Data ratione inter ordinatas abſciſſis datam quoque inter ſe rationem ſeruantibus reſpondentes inuenire aequationem inter abſciſſam quamlibet & reſpondentem ipſi applicatam.* Huius Problematis exemplum dedi in *Actis Helueticis Tom. III.* methodum oſtenſurus aequationem inter arcum & ſinum absque calculi infiniteſimalis adminiculo ex ea ratione deducendi, quam inter ſe ſeruant ſinus arcus ſimpli & dupli. Similia quoque exempla ſupra occurrunt Cap. III. P. I.

§. 452. Quaeruntur vero hic valores ϱ & μ per x exprimendi. Quare fiat

$$\varrho = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \&c.$$
$$\mu = a + bx + cx^2 + dx^3 + \&c.$$

atque euidens eſt prodire λ & $\varkappa$, ſi pro x ſubſtituatur $2x$, ut ſit

$$\lambda = A + 2Bx + 4Cx^2 + 8Dx^3 + \&c.$$
$$\varkappa = a + 2bx + 4cx^2 + 8dx^3 + \&c.$$

§. 453. Subſtitutis iam his ſeriebus in formulis (§. 450.)

$$\lambda = \varrho(1+)$$
$$\varkappa = \mu\mu : (1 - \varrho\varrho)$$

ſiue $\mu\mu \quad \varkappa(1 - \varrho\varrho)$

atque binis ſeriebus inter ſe collatis, aequari poterunt coefficientes terminorum homologorum, ut adeo hoc modo coefficientes iſti innoteſcant.

§. 454. Calculo vero actu instituto inueni, faciendum esse $A=0$, unde porro $a=1$. coefficientes B, b manere indeterminatos, atque per hos expressum iri ceteros, ut sit

$$C=bB$$

$$D=\frac{2b^2B+B^3}{3}$$

$$E=\frac{b^3B+2B^3b}{3}$$

$$F=\frac{2b^4B+11b^2B^3+2B^5}{15}$$

$$G=\frac{b^5B+26b^3B^3+17bB^5}{45}$$

$$H=\frac{4b^6B+114b^4B^3+180b^2B^5+17B^7}{315}$$

&c.

Similiter

$$c=\frac{b^2+B^2}{2}$$

$$d=\frac{b^3+5bB^2}{6}$$

$$e=\frac{b^4+18b^2B^2+5B^4}{24}$$

$$f=\frac{b^5+58b^3B^2+61B^4b}{120}$$

$$g=\frac{b^6+179b^4B^2+479b^2B^4+61B^6}{720}$$

$$h=\frac{b^7+543b^5B^2+3111b^3B^4+1385bB^6}{5040}$$

&c.

§. 455. Erit ergo lumen ab x vitris reflexum

$$\varrho = Bx + bBx^2 + \frac{2b^2B + B^3}{3}x^3 + \frac{b^3B + 2bB^3}{3}x^4 + \frac{2b^4B + 11b^2B^3 + 2B^5}{15}x^5 + \&c.$$

refractum

$$\mu = 1 + bx + \frac{b^2 + B^2}{2}x^2 + \frac{b^3 + 5bB^2}{6}x^3 + \frac{b^4 + 18b^2B^2 + 5B^4}{24}x^4 + \frac{b^5 + 58b^3B^2 + 61bB^4}{120}x^5 + \&c.$$

Unde lumen dispersum vel amissum

$$1 - \varrho - \mu = (B+b)\,x + \frac{(B+b)^2}{2}.x^2$$

$$+ \frac{(b+B)^2.(b+2B)}{2.3}x^3 +$$

$$\frac{(b+B)^3.(b+5B)}{2.3.4}x^4 + \frac{(b+B)^3.(b^2+13bB+16B^2)}{2.3.4.5}x^5$$

$$+ \frac{(b+B)^4.(b^2+28bB+61B^2)}{2.3.4.5.6}x^6$$

$$+ \frac{(b+B)^4.(b^3+60b^2B+297bB^2+272B^3)}{2.3.4.5.6.7}x^7$$

$$+ \frac{(b+B)^5.(b^3+123b^2B+1011bB^2+1385B^3)}{2.3.4.5.6.7.8}x^8$$

$$+ \&c.$$

§ 456. Constantes b, B, quae his seriebus insunt, experimentis determinantur, quippe pendent a vitrorum impelluciditate. Hoc tan-

tantum notabimus, quod b ſit negatiua, quippe μ non poteſt eſſe > 1.

§. 457. Series iſtae mirum in modum contrahuntur, ſi vitra ponantur perfecte pellucida. Hoc enim caſu erit $b = -B$. unde

$$\varrho = Bx - B^2x^2 + B^3x^3 - \&c = \frac{Bx}{1+Bx}$$

$$\mu = 1 - Bx + B^2x^2 - B^3x^3 + \&c = \frac{1}{1+Bx}$$

Quodſi utraque haec formula cum iis comparetur, quas ſupra pro caſu perfectae pelluciditatis inuenimus (§. 359) patebit hoc caſu eſſe

$$B = -b = \frac{M}{1-M} = \frac{M}{N}.$$

Hoc vero compendio pro vitris minus pellucidis uti non licet.

§. 458. Ut iam determinetur quantitas luminis diſperſi, quaerendi erunt valores M,N, quales ſunt in vitris minus pellucidis, ſub angulis incidentiae quibuscunque. Quem in finem experimentum XII. (§. 352.) ita immutaui.

EXPERIMENTVM XVII.

§. 459. Chartae albae AC verticaliter impoſui tabulam vitream AB, in quam lumen incideret oblique ſecundum directionem parallelam IE, MC, atque refractum a charta in CE exciperetur. Porro aliam tabulam vitream ad ſenſum aeque pellucidam CD in C ita inclinaui, ut lumen ſecundum eandem directionem LD, MC incidens ab ea in idem ſpatium Fig. 44.

CE

CE reflecteretur, atque hoc ſpatium CE ab utroque lumine refracto & reflexo aeque colluſtraretur, ac aliud chartae ſpatium a lumine directo illuminatum. Quo facto dimenſus ſum angulos incidentiae & reflexionis, inveniique fuiſſe

$$\begin{array}{lll} & MCA & = 49^\circ. \\ \text{unde ob} & BAC & = 90 \\ \text{erat} & CBA & = 41. \\ \text{porro} & DCE & = 74\tfrac{1}{2} \\ \text{unde} & MCD & = 25\tfrac{1}{2} - DCE - MCA = CDE, \\ & DEC & = 80 = 180^\circ - DCE - CDE. \end{array}$$

Erat ergo angulus incidentiae luminis directi & refracti in chartam CE $= 49^\circ$, luminis reflexi in eandem chartam $= 80^\circ$. Angulus incidentiae luminis in tabulam AB $= 41^\circ$, in tabulam CD $= 25\tfrac{1}{2}^\circ$.

§. 460. Facile iam hinc inueniri poterit ſumma luminis in utroque vitro amiſſi. Quaerenda enim erit ſumma luminis, quod in ſpatium CE ſub iiſdem angulis refringeretur & reflecteretur in caſu perfectae pelluciditatis. Erit autem pro vitro AB ob angulum incidentiae $= 41^\circ$. (§. 438. ſeqq.)

$$q = 0{,}0456 \quad p = 0{,}0997$$
$$M = 0{,}1296 \quad N = 0{,}8704$$

Sed lumen refractum N in chartam incidit ſub angulo 49°, adeoque debilitatur illuminatio ut ſinus huius anguli, qui eſt $= 0{,}7547$. Quare illuminatio vitro AB debita in caſu perfectae tranſparentiae fuiſſet $= (0{,}8704)$. $(0{,}7547). = 0{,}6569$.

§. 461. Porro cum lumen in vitrum CD incidat sub angulo $25\frac{1}{2}$, reperitur pro casu perfectae pelluciditatis

$$q = 0,1027 \qquad p = 0,2164$$
$$M = 0,2623 \qquad N = 0,7377$$

At lumen reflexum *M* in chartam incidit sub angulo 80°, unde debilitatur Illuminatio ipsi debita in ratione sinus huius anguli, qui est $= 0,9848$. Erit ergo illuminatio vitro CD debita $= (0,2623).(0,9848) = 0,2587$.

§. 462. Cum ergo in casu perfectae pelluciditatis sit illuminatio chartae quae debetur

lumini refracto $= 0,6569$
reflexo $= 0,2587$

Erit utriusque summa $= 0.9156$

Haec vero deberet esse aequalis illuminationi, quae prouenit a lumine directe incidente. Quod cum incidat sub angulo 49°, debilitatur ut sinus huius anguli, eritque ergo $= 0,7547$. Huic claritati claritas spatii CE in experimento reipsa est aequalis. Quare lumen quod in casu perfectae pelluciditatis esset $= 0,9156$. adhibitis vitris minus pellucidis tantum fuit $= 0,7547$. Ut adeo debilitatum sit in ratione $(0,9156) : (0,7547) = 1 : 0,8233$ proxime $= 14 : 17$, ut adeo $\frac{3}{17}$ amittatur.

§. 463. Quantitas haec amissa utique admodum est notabilis, quod inde prouenit, quod vitrum sumsi admodum viride, quale ad conficienda specula minora viliorisque pretii adhibent. Cum vero quaelibet fere vitra diuersa gaudeant pelluciditate, facile patet eiusmodi experimenta nequam uniuersalia esse atque

atque quantitates similibus experimentis definitas parui usus esse, cum aliis adhibitis vitris aliae prodeant. Cum vero utique methodus, qua definitur, hic sit exponenda, ea usus sum cautela, ut singula experimenta iisdem vitris instituerem. Alias enim dubium an regulae, quas hic tradam, sibi constent nec ne, experimentis solui non posset.

§. 464. Debilitatio luminis, quam ex ultimo experimento deduximus, utrique vitro debetur. Cumque anguli incidentiae sint diuersi, determinari nequit, quid alterutri soli debeatur, nisi prius definiamus, *qua ratione debilitatio luminis ab obliquitate incidentiae pendeat.* Huius ergo problematis solutionem tentabimus sequentem.

§. 465. Resumamus itaque aequationes

$$M = q + \frac{nmp\lambda^2}{1 - p^2\lambda^2}$$

$$N = \frac{nm\lambda}{1 - p^2\lambda^2}$$

quas supra (§.403.) pro vitris minus pellucidis eruimus. Vidimus vero decrementum, quod lumen patitur a minori vitrorum pelluciditate, pendere a ratione $1 : \lambda$, in qua debilitatur, dum in vitro rectarum BC, CD,
Fig. 34. DE &c. quamlibet percurrit. Haec ergo ratio pro singulis angulis incidentiae est determinanda.

§. 466. Quod ut fiat, vitra, quantumuis impura fuerint, eatenus tamen in singulis suis partibus homogeneorum naturam affectare assumendum est, ut particulae lumen intercipien-

cipientes aeque in ipsis sint disseminatae. Quod nisi fuerit, aut assumenda erit lex quaedam, ad quam earum disseminatio sese componit, aut ab omni calculo animus erit abstrahendus. Cumque porro calculus, quem hic instruemus quibuscunque aliis diaphanis adplicari possit, rem uniuersalius concipere e re erit.

§. 467. Sit ergo corpus minus diaphanum quodlibet, ita tamen comparatum, ut in singulis eius partibus particulae lumen intercipientes aeque sint sparsae. Lumen istud ingrediatur, huiusque densitas initialis siue in ingressu sit 1. Percurso spatio $= x$, ita debilitatum esse statuatur ut iam sit $= v$; atque euidens est, lumen spatiolum dx percurrendo, iacturam radiorum facere, quae est $= -dv$. Hanc iacturam eo maiorem statuere licet, quo maior sit luminis in obstacula ista incurrentis quantitas & densitas, quoque maius fuerit spatiolum percursum. Unde erit

$$dv = v dx : 7$$

siue integrando

$$\log \frac{1}{v} = x 7$$

Decrescit ergo lumen ut ordinatae logisticae, cuius subtangens est $= q$ abscissae vero sunt ipsa via x a lumine percursa.

§. 468. Hunc calculum eodem modo absoluit Cel. BOVGVER in tractatu supra laudato (§. 315.) sumtisque experimentis inuenit subtangentem q pro aqua marina esse $= 115$ digitis pedis parisini, ita ut lumen in aqua marina hoc spatium percurrendo debilitetur in ratione ordinatarum logisticae longitudine sub-

ſubtangentis ab inuicem diſtantes, adeoque $=(2{,}71828\ldots)$: 1 ſiue proxime $=19:7$ ſiue fere $=8:3$. Ita vero experimentum inſtituit acutiſſimus vir, ut lumen per duo vitra, quibus incluſa erat aqua, tranſiret. Neque video quo modo aliter res peragi poſſit. At vero hoc ipſo lumen debito nimis debilitatur, cum non modo pars eius ab utraque vitrorum & aquae ſuperficie, in quam incidit lumen, reflectatur, verum & in ipſis vitris alia pars eaque minus adhuc contemnenda diſpergatur. Hoc vero decrementum, quod hic plane eſt alienum, in calculum, non induxit. Unde hoc certe reſpectu longitudo ſubtangentis repertae utique maior eſſe debet, etſi iam qualis eſt, longe nimia eſſe videatur. Experimentum vero ita eſt comparatum, ut circumſtantiae alienae, quaeque & luminis quantitatem magis quam optandum eſſet, alterant, iudiciumque oculi, ob viridem luminis aquam permeantis colorem, reddunt incertius, arceri ſaltem omnes nequeant. Hanc vero ob cauſſam ab eo animum abſtrahendum eſſe cenſui.

§. 469. Cum itaque ſit

$$\log \frac{1}{v} = x:\gamma$$

ſiue ponendo $\log e = 1$,

$$v = e^{-x:\gamma}$$

valor

valor hic in formulis (§. 465.)

$$M = q + \frac{nmp\lambda^2}{1 - p^2\lambda^2}$$

$$N = \frac{nm\lambda}{1 - p^2\lambda^2}$$

erit substituendus. Patet vero esse debere $\nu = \lambda$, atque viam percursam x in vitro esse $= BC = CD = DE =$ &c. adeoque per leges refractionis $x = PQ : \sqrt{(1 - \frac{4}{9}(\cos ABP)^2)}$ Fig 34.

§. 470. Dicatur ergo crassities vitri $PQ = c$, angulus incidentiae $ABP = G$, atque erit

$$x = 3c : \sqrt{(5 + 4 \sin g^2)}$$

Unde porro substitutione facta

$$M = q + \frac{mnpe^{-2x:7}}{1 - ppe^{-2x:7}}$$

$$N = \frac{mne^{-x:7}}{1 - ppe^{-x:7}}$$

sive

$$M = q + \frac{mnp}{e^{2x:7} - pp}$$

$$N = \frac{mne^{x:7}}{e^{2x:7} - pp}$$

§. 471. At in ultimo experimento (§. 469. Fig. 44. seqq.) habuimus angulum incidentiae luminis

	in D	in B
	$g = 25\frac{1}{2}$	$g = 41.^{9}$
Unde est.......	$x = 1,257.c$	$x = 1,157.c$
atque	$q = 0,027$	$q = 0,0456.$
	$p = 0,2164$	$p = 0,0997.$
hinc	$n = 0,8973$	$n = 0.9544$
	$m = 0,7836$	$m = 0,9003$

Unde porro erit lumen a vitro CD reflexum.

$$M = 0,1027 + \frac{(0,2164).(0.8973).(0,7836)}{e^{2,504.c:7} - (0,2164)^2}$$

refractum a vitro AB

$$N = \frac{(0,9544).(0,9003)e^{1,157.c:7}}{e^{2,304.c:7} - (0,0997)^2}$$

Sed ob obliquitatem incidentiae in chartam, debilitatur M ut sin $8° = 0,9877.$ & N ut sin $49° = 0,7547.$ Utriusque vero hac ratione debilitati summa debet esse = lumini directe incidenti = 0,7547 (§462.) Unde fiet.

$$(0,9877)\, M + (0,7547) N = 0,7547.$$

Quodsi ergo in hac aequatione substituantur valores M, N ante reperti, debita facta reductione prodit

$$\frac{e^{1,157.c:7}}{e^{2,314.c:7} - 0,0100} + \frac{0,23175}{e^{2,504.c:7} - 0,04683.} = 1,0074.$$

§. 472.

§. 472. Huic aequationi satisfacere inueni quantitatem

$c:7 - 2:13$.

Quo enim valore substituto, prodit lumen

reflexum $= 0,2057$.
refractum $= 0,5466$

Summa - $= 0,7523$.
Quae deberet esse - - $= 0,7547$.

differt ergo 0,0024.

Quae differentia cum sit contemnenda, patet tuto pro iis vitris, quibus usus sum, quaeque & in experimentis sequentibus adhibui, fieri posse

$$\frac{c}{7} = \frac{1}{13}$$

§. 473. Sub angulo incidentiae recto est

$x = c$

$q = 0,0199$ $n = 0,9801$.
$p = 0,0448$ $m = 0,9552$.

Unde habetur

$M = 0,0516$ $N = 0,8111$.

Quare $M + N = 0,8627 = 1 - 0,1373$

Amittitur ergo pars $= 0,1373$ siue $= \frac{1}{22}$.

§. 474. His valoribus in formulis (§. 448. 450.) substitutis, reperitur lumen sub angulo recto

a vitris	reflexum	refractum	amissum
1 - -	0,0516 - -	0,8111 - -	0,1373.
2 - -	0,0856 - -	0,6596 - -	0,2548.
3 - -	0,1081 - -	0,5368 - -	0,3551.
4 - -	0,1228 - -	0,4377 - -	0,4495.
8 - -	0,1467 - -	0,1945 - -	0,6588.

16 - - 0,1524 - - 0,0387 - - 0,8089.
32 - - 0,1526 - - 0,016 - - 0,8458.
&c. &c. &c. &c.

§. 475. Quodsi haec tabella cum tabella (§. 444) conferatur, patebit quantum detrimenti lumen capiat a minori vitrorum pelluciditate. Impellucidiora adhuc hisce quibus usus sum, adhibuisse Cel. BOVGVER vel inde patet, quod lumen a duobus vitris refractum iam debilitari videbat in ratione 1 ad $\frac{1}{2}$. At, quod vel ex tabella patet, in nostra experimento haec ratio vix est $= 1 : \frac{2}{3}$. Quod hic monemus ob dicta in §. 468.

§. 476. Definito valore ipsius $c:7$ per experimentum posterius, dabuntur quantitates M, N, P, Q, R, S, &c. pro quotlibet vitris & quibusuis angulis incidentiae, etsi calculus haud parum sit operosus, & prolixus. Ut vero & aliis experimentis firmentur formulae (§. 470.) supra erutae, rem ita sum adgressus.

EXPERIMENTVM XVIII.

Fig. 45. §. 477. Tabulam vitream AB chartae albae AE impositam ad hanc utcunque inclinaui, ut lumen secundum directionem rectae BD parallelam incidens atque per vitrum AB transiens collustraret chartae spatium AD. Porro duas alias tabulas vitreas iuxta primam collocavi in AC, easque ita inclinaui, ut lumen utramque sub eadem directione BD, CE transiens illuminaret spatium chartae priori fere contiguum, quod referat recta AE, utque utrumque hoc spatium aeque videretur illuminatum. Quo facto dimensus sum angulos DBA,

DBA, ECA, qui aequales ſunt illis ſub quibus lumen in vitra AB, AC incidebat. Experimentum alternatis angulis incidentiae inſtauraui inuenique ſibi reſpondiſſe

Ang. ACE	Ang. ABD	Ang. ACE	Ang. ABD
1° - - 15°	- - 9°	6 - - 48	- - - 24½
2° - - 20	- - - 12½	7 - - 58	- - - 28
3° - - 22½	- - - 13½	8 - - 80	- - - 29½
4° - - 32½	- - - 18	9 - - 90	- - - 30.
5° - - 42	- - - 22		

§. 478. His angulis cum methodus ſupra deſcripta (§. 396. ſeqq.) longe facilius adplicari poſſit, priores ACE ſpectaui ceu abſciſſas, poſteriores ABD ceu ordinatas reſpondentes cuiuſdam curuae, qua conſtructa, inueni eos parum a lege homogeneorum aberrare, unde medio ſumto ut ſupra (§. cit.) inueni ſibi congruere

Ang. ACE	Ang. ABD
10° - - - - - -	6
20 - - - - - -	12
30 - - - - - -	17
40 - - - - - -	21
50 - - - - - -	25
60 - - - - - -	28
70 - - - - - -	29
80 - - - - - -	29¾
90 - - - - - -	30

§. 479. Porro his angulis ita adcommodaui calculum. Pro angulis ABD per formulas §. 470. quaſiui lumen refractum *N* ipſis reſpondens; ſimilique modo adhibendo eaſdem formulas una cum iis quas dedi in §. 448. de-

terminaui lumen per duo vitra refractum Q angulis incidentiae ACE debitum atque inueni fuisse proxime $Q = N$. Hoc vero cum esse debeat, inferre licet, formulas supra erutas cum experimentis congruere.

§. 480. Sic v. gr. Sumsi in exper. 6to angulum ACE $= 48°$, & respondentem ipsi angulum ABD $= 24\frac{1}{2}°$, atque calculo subducto prodire inueni, pro angulo

ACE $= 48°$	ABD $= 24\frac{1}{2}°$
$M = 0{,}0854$	$M = 0{,}2215$.
$N = 0{,}7515$	$N = 0{,}5852$.
$Q = 0{,}5689$	

Unde cum sit

$$N - Q = 0{,}5852 - 0{,}5689 = 0{,}0163.$$

patet differentiam istam, quae nulla esse deberet, admodum paruam esse, atque deberi vel angulis minus exacte definitis, vel errori, cui obnoxium esse potest oculi iudicium.

§. 481. Similiter sumto angulo ACE $= 90°$, inueni esse Q 0,6596 (§.474) Sumtoque angulo ABD $= 31°$, est N ipsi respondens $= 0{,}6594$. quare

$$Q - N = 0{,}0002.$$

Quae differentia est veluti plane nulla. At vero angulo ACE $= 90°$, non respondet ABD $= 31°$, verummodo $= 30°$. Unde ergo aberratio experimenti a formula est fere unius gradus.

§. 482 Non maiorem aberrationem pro ceteris angulis inueni. Calculum vero tantum constructione absolui, cum ob prolixitatem taediosior sit. Respondit vero

an-

angulo ACE	angulus ABD.	cum esse deberet.	differentia
10°	6	6	0
20	13	12	+1
30	$17\frac{2}{3}$	17	$+\frac{2}{3}$
40	21	21	0
50	24	25	—1.
60	27	28	—1.
70	$28\frac{2}{3}$	29	$-\frac{1}{3}$.

§. 483. Inuenimus esse pro vitris, quibus usus sum, (§.472.)

$$c : 7 = 2 : 13$$

Dabitur ergo hinc subtangens 7 per crassitiem vitrorum. Haec vero erat $= \frac{5}{8}$ lineae digiti Parisini, unde erit

$$c = \tfrac{5}{8}'''$$
$$7 = 5\tfrac{1}{2}'''$$

Quod certe indicat, vitra ista fuisse admodum impura, quippe lumen in ipsis vix $\frac{1}{2}$ digitum percurrendo ita debilitatur, ut ad tertiam fere partem reducatur, duae tertiae partes dispergantur. Notandum tamen est, in hoc computo non subtractum esse lumen quod in superficie dispergitur, quodque pluries haud contemnendum esse iam supra vidimus.

§. 484. *Subtangens 7 ipsam quoque exhibet diaphanorum pelluciditatem.* Haec maxima est & absoluta, ubi fuerit 7 infinita. Contra ea absoluta aderit opacitas, ubi fuerit $7 = 0$. Utrumque vero hunc casum in rerum natura haud existere autumo. Quid obstet priori supra iam vidimus (§. 326.) Posteriorem perlustrabimus, cum de corporibus opacis sermo erit.

§. 485. Quodſi ponamus opacitatem vel impelluciditatem eſſe in ratione reciproca pelluciditatis, *erit quoque opacitas reciproce ut ſubtangens 7*. Eſt enim (§. 467.) lumen amiſſum $-dv$ reciproce ut iſta ſubtangens, quae neque a lumine v, neque a via percurſa dx, verum modo, ab ipſa corporis impelluciditate pendet.

CAPVT III.

De lumine per ſuperficies curuas, praecipue per lentes cauſticas refracto, huiuſque menſura.

§. 486. Definita iam, ut in ſuperioribus factum eſt, quantitate radiorum, qui conos luminoſos conſtituunt, dimenſaque ea radiorum parte, quae a ſuperficiebus vitrorum reflectitur, atque per eaſdem tranſmittitur, haud difficile erit, eos euoluere caſus, quibus utraque ſimul obtinet. Hi vero cum ſint infiniti, eorumque plurimi operoſiori proſequendi ſint calculo, ſiquidem cunctas minutias ſpectare, earumque rationem habere volueris, hinc medium quoddam in his tenere propoſitum eſt. Minutias iſtas, quatenus id abſque notabili errore fieri poterit, abiiciemus, eoſque potiſſimum caſus perluſtrabimus, qui frequentiores ſunt, quibuſque utendum erit ad experimenta quamplurima in ſequentibus inſtituenda atque deſcribenda, operam denique dabimus ut formulae eruendae concinniores euadant, quo facilius praxi adcommodari poſſint.

pro-

§. 487. Ut ergo & hic a simplicioribus progrediamur ad ea, quae magis sunt complexa, sumemus unicam lentem causticam, atque primo a vi eius reflectente abstrahendo, quaeremus, *qua ratione lumen per eam refractum, vel intendatur vel minuatur, quaeque eius in foco lentis sit densitas, quaeque ad illuminationem directam ratio.*

§. 488. Porro ut vel lentes ipsae vel earum aperturae sunt circulares, sic & obiectum luminosum circulare & planum statuemus, ita ut axis lentis per centrum obiecti normaliter transeat. Quid faciendum sit, ubi haec secus fuerint, hoc casu euoluto facile patebit.

§. 489. Sit ergo lens AB, quam ponemus utrinque conuexam, cuiusque superficies sint segmenta sphaerarum, quarum semidiametri EC, CE. Axis lentis sit FCG, obiectum circulare gGγ ad ipsum sit normale, huiusque centrum G. Focus sit in F, atque ductis rectis gCf, γCφ erit φFf imago obiecti. Huius iam quaerenda sit claritas. Fig.46.

§. 490. At iam vel per se patet infinitos hic esse conos luminosos, singulosque eandem habere basin communem, quae est lens AB vel eius apertura. A parte antica coni isti sunt radiorum diuergentium, quippe e singulis obiecti gGγ punctis radii in totam lentis superficiem incidunt. Ab altera parte CF coni isti sunt radiorum coincidentium, cum singuli radii, qui e puncto quolibet g in totam lentem sese diffundunt, refractione iterum in punctum f colliment, ibique puncti g imaginem depingant. Unde cum a vi reflectente & dispergente vitri hic abstrahamus animum,

 facile

facile consequitur, *quantitatem radiorum utriusque huius com eandem manere.* Quod porro cum de singulis valeat, constat *uniuersam radiorum quantitatem, quae ex obiecto in superficiem vel aperturam lentis incidit, totam eam quoque incidere in imaginem φFf.* Quare *habebitur imaginis illuminatio vel claritas media, si quantitas ista radiorum per aream imaginis diuidatur.* Similique modo inuenietur claritas dato cuiuis imaginis puncto, dataeque cuilibet ipsius parti debita.

§. 491. Cumque porro per superiora quoque detur illuminatio directa, quae obtinet, ubi charta in φf obiecto luminoso obuertitur, consequens est, *dari hinc quoque comparationem inter illuminationem imaginis & eam quae remota lente directe obiecto luminoso debetur.* His iam ita calculum adplicabimus.

§ 492. Sit ergo

distantia obiecti - - -	$GC = b$
distanti foci - - - - -	$CF = f$
semidiameter obiecti - -	$Gg = x$
semidiameter foci - -	$\varphi F = \xi$
semidiameter lentis - -	$AC = b$
semidiameter - - - -	$DC = c$
semidiameter - - - -	$CE = e$

Porro vocetur quantitas radiorum in lentem incidentium $= q$, claritas vel illuminatio imaginis media $= r$, illuminatio directa $= \lambda$, illuminatio absoluta $= \pi$ (§. 100. 123.)

§. 493. Lentis crassitiem ceu nullam spectamus, unde per principia dioptrices erit

$$f = \frac{2ceb}{(c+e)b - 2ce}$$

Porro

Porro cum per eadem principia sit

$$Gg : GC = Ff : CF$$
$$x : b = \xi : f$$

erit substitutione facta

$$\xi = \frac{2cex}{(c+e)b - 2ce}$$

Quibus ergo aequationibus datur ratio inter distantias & semidiametros obiecti & imaginis.

§. 494. Ut iam imaginis claritas definiatur, ex superioribus recordabimur esse (§. 214.)

$$q = \tfrac{1}{2}\pi\pi[bb + bb + xx - \surd((bb + bb + xx)^2 - 4x^2b^2)]$$

Quae est quantitas radiorum in lentis superficiem vel eius aperturam incidens. Hac ergo per aream imaginis, quae est $= \pi\xi\xi$ diuisa, prodibit imaginis claritas media.

$$\eta = q : \pi\xi\xi.$$

§. 495. Quodsi concinnorem desideres formulam, ducta recta gB erit (§. 217.)

$$q = \tfrac{1}{4}\pi\pi\,(gB - gA)^2$$

adeoque

$$\eta = \pi\,\frac{(gB - gA)^2}{4F\Phi^2}$$

Vocetur conus obliquus BgA *conus extremus*, sintque Ag, Bg eius *latera*, erit gB — gA *differentia laterum coni extremi*. Hac ergo seruata notione, atque recordando esse π illuminationem absolutam, sequens inde elicietur

THEO-

THEOREMA XXIII.

§. 496. *Illuminatio absoluta est ad illuminationem imaginis mediam, ut area imaginis ad aream circuli, cuius diameter est differentia laterum coni extremi* gB, gA.

DEMONSTRATIO.

Cum enim sit

$$\eta = \frac{\pi(gB - gA)^2}{4\,F\varphi^2}$$

erit

$$\pi F\varphi^2 : \tfrac{1}{4}(gB - gA)^2\pi = \pi : \eta$$

Est vero $\pi.F\varphi^2$ area imaginis, $\frac{1}{4}(gB-gA)^2\pi$ area circuli cuius diameter $= gB - gA$, & π est illuminatio absoluta; Unde constat propositum.

§. 497. Tranferatur Ag ex g in K, atque bifariam secta BK in P, erit $gP = \frac{gA + gB}{2}$, adeoque (§.222.)

$$q = \frac{\pi\pi Gg^2.AC^2}{gP^2}$$

Unde porro

$$\eta = \frac{\pi.Gg^2.AC^2}{gP^2.\varphi F^2}$$

Datur ergo illuminatio imaginis media η per semidiametros obiecti, lentis, & imaginis, & per medium arithmeticum inter latera coni extremi gB, gA. Unde

THEOREMA XXIV.

§. 498. *Illuminatio imaginis media est ad illuminationem absolutam, ut factum ex area obiecti in* *aream*

aream lentis ductae, ad factum ex area imaginis in aream circuli, cuius semidiameter est gP *siue medium arithmeticum inter latera coni extremi* gA, gB.

DEMONSTRATIO.

Cum enim sit

$$\eta = \frac{\pi.Gg^2AC^2}{gP^2.\phi F^2}$$

erit

$$\eta : \pi = (\pi.Gg^2.\pi.AC^2):(\pi.\phi F^2.\pi.gP^2)$$

Sunt vero $(\pi.Gg^2)$, (πAC^2), $(\pi\phi F^2)$, $(\pi(gP)^2$ areae quas effert theorema, & π est illuminatio absoluta. Unde euidens est propositum.

§. 499. Est porro §. 493.

$$Gc : CF = gG : \phi F$$

quare substitutione facta erit

$$\eta = \frac{\pi.AC^2GC^2}{CF^2.gP^2}$$

Sed est $AC : CF =$ tang. AFC, & $GC : gP$ erit cosinus cuiusdam anguli, qui dicatur $= \omega$, unde erit

$$\eta = \pi.(\text{cosin } \omega)^2.(\text{tang AFC})^2$$

Unde facile elicietur

THEOREMA XXV.

§. 500. *Claritas in centro imaginis* F *est ad claritatem absolutam ut quadratum tangentis semidiametri adparentis lentis in* F *visae ad quadratum secantis eiusdem semidiametri adparentis in* G *visae.*

DEMONSTRATIO.

Cum enim eadem maneat centri claritas, quaecunque sit obiecti magnitudo, ponamus ob-

obiectum esse infinite paruum, atque patet conum luminosum extremum BgA cum cono medio eoque recto BGA coincidere, adeoque fore gP = GA = GB. Quare erit

$$\text{cosin}\, \omega = GC : GA = \text{cosin} AGC$$

adeoque

$$\eta = \pi \cos AGC^2 . \text{tang } AFC^2$$

siue

$$\eta : \pi = \text{tang} AFC^2 : \sec AGC^2$$

Sunt vero anguli AFC, AGC semidiametri lentis in F & G visae adparentes. Constat ergo propositum.

THEOREMA XXVI.

§. 501. *Si obiectum fuerit infinite remotum, erit imaginis claritas media ad illuminationem absolutam, ut quadratum tangentis semidiametri lentis in* F *visae adparentis ad quadratum secantis semidiametri adparentis obiecti in* C *visi.*

DEMONSTRATIO.

Etenim ob distantiam obiecti infinitam erit gC = gP, quare

$$\text{cosin}\, \omega = GC : gC = \text{cosin } gCG$$

unde

$$\eta = \pi (\text{cosin } gCG)^2 . (\text{tang } AFC)^2$$

siue

$$\eta : \pi = (\text{tang } AFC)^2 : (\text{sec.} gCG)^2$$

Est vero gCG semidiameter obiecti adparens, cum in C videtur, & AFC semidiameter adparens lentis, cum in foco F videtur. Unde euidens est propositum.

§. 502. Quodsi tantum quaeratur claritas in

in centro imaginis, erit gCG = o, sec. gCG = 1, adeoque

$\eta : \pi = \text{tang } AFC^2 : 1.$

Claritas in centro imaginis singulis casibus est maxima, in hoc vero casu ea quae ex omnibus media est decrescit ut quadratum cosinus semidiametri obiecti adparentis.

THEOREMA XXVII.

§. 503. *Si distantiae obiecti & imaginis a lente fuerint aequales, erit illuminatio imaginis centralis ad illuminationem absolutam, ut quadratum sinus semidiametri lentis in* F *visae adparentis ad quadratum sinus totius.*

DEMONSTRATIO.

Est enim hoc casu

$GC = FC$

unde $CGA = CFA$

adeoque &

$\text{sec}AGC^2 = \text{sec } AFC^2$

At vero eodem hoc casu est (§. 500.)

$\eta = \pi \text{ tang } AFC^2 . \text{ sec } AGC^2$

Unde substituendo erit

$\eta = \pi . \text{tang } AFC^2 . \text{sec } AFC^2$

siue

$\eta = \pi . \text{sin } AFC^2$

id est

$\eta : \pi = \text{sin} AFC^2 : 1$

THEOREMA XXVIII.

§. 504. *Si distantia obiecti & imaginis a lente fuerit aequalis, eadem erit chartae, qua excipitur imago, claritas in centro* F, *quae foret in eodem centro, si obie-*

obiecto remoto lens ipſa aeque eſſet luminoſa ac eſt obiectum.

DEMONSTRATIO.

Eſt enim per theorema praecedens pro caſu priori

$$\eta = \pi . \sin AFC^2$$

at eadem formula prodit pro caſu poſteriori, vi theorematis quinti (§. 109. 121.) ſi hoc caſu lens ipſa ſpectetur ceu obiectum illuminans. Conſtat ergo propoſitum.

§. 505. *Idem obtinebit quoties fuerit* $\omega = AFC$. Vidimus enim eſſe (§. 499.)

$$\eta = \pi . \tang AFC^2 . \cos \omega^2$$

quare ſubſtitutione facta erit

$$\eta = \pi \sin AFC^2$$

Eſt vero his caſibus η claritas imaginis media, quae ergo erit eadem, quae obtineret in centro F, ſi lens aeque foret luminoſa ab obiectum, atque charta φf a lente in AB poſita colluſtraretur.

§. 506. Ceteris caſibus poſitio haec non obtinet, etſi plurimis ad verum proxime accedat. Notandum tamen eſt, in toto hoc computo vim vitri reflectentem ut & quantitatem radiorum diſperſorum ceu nullam haberi. Hoc vero ipſo actu ſecus eſt, cum eiusmodi vitra non dentur. Unde utique claritas ſingularum partium imaginis minor eſt. Ponamus ergo eam ob radios reflexos & diſperſos minui ut 1 ad $\varkappa$, erit (§. 499.)

$$\eta = \varkappa \pi \tang AFC^2 \cos \omega^2 .$$

§. 507.

§. 507. Frequentiores sunt ii casus, quibus distantia obiecti est veluti infinita Unde adeo pro his erit illuminatio imaginis in centro F

$$\eta = \varkappa . \pi . \text{tang } AFC^2 \cos. gCG^2.$$

siue

$$\eta = \varkappa \pi \frac{\sin AFC^2 . \cos. gCG^2.}{\cos in AFC^2}$$

§. 508. Angulus AFC pendet ab apertura lentis. Quod si ergo haec ea fuerit, ut siue vere siue proxime fieri possit

$$\varkappa = \frac{\cos. AFC^2}{\cos. GC^2 g}$$

fiet quoque

$$\eta = \varkappa \pi . \sin AFC^2.$$

§. 409. Dantur vero plurimi casus, quibus oportunae hae circumstantiae vel per se obtinent, vel admodum parum ab his aberrant. Sumta v. gr. lente pellucidiore erit $\varkappa$ fere $\frac{15}{16}$. Porro si ista fuerit valde conuexa ut pro obiectis remotioribus angulus AFC sit 14°, erit quoque $\varkappa = \cos. AFC^2$ aut proxime. Unde pro claritate centrali.

$$\eta = \pi . \sin AFC^2$$

Quodsi ergo his casibus radii solares per lentem causticam refracti in foco excipiantur charta alba, eadem erit imaginis claritas, quae foret, si in vicem lentis substitueretur particula ipsius solis eiusdem magnitudinis, chartam ad eandem distantiam CF *collustratura.*

§. 510. Hinc ergo quodammodo colligere licet, quam immensa sit solis claritas, quantaque *ceteris paribus* esse possit eius distantia ad

Q quam

quam singula corpora terrestria comburrerentur. Eadem certe ni longe maior est vis caustica particulae solis in vicem lentes substituendae, ac est vis caustica radiorum ope lentis in foco collectorum. Unde dubio caret, in utroque casu eadem obiecta combustum iri.

§. 511. Illuminatio directa λ per theorema V. facile definitur. Ductis enim rectis gF, γF, erit gFG $-$ GFγ sinus semidiametri adparentis obiecti Gγ in F visi, unde erit (§. 109. 121.)

$$\lambda = \pi \sin gFG^2$$

THEOREMA XXIX.

§. 512. *Si obiectum fuerit infinite remotum erit claritas imaginis media ad illuminationem directam, ut quadratum tangentis semidiametri adparentis ipsius lentis in F visae, ad quadratum tangentis semidiametri adparentis obiecti.*

DEMONSTRATIO.

Etenim hoc casu (§.501.)

$$\eta = \pi . \tang AFC^2 . \cos gCG^2$$

& ob gFG $=$ gCG erit quoque

$$\lambda = \pi . \sin gCG^2$$

unde fit

$$\eta : \lambda = \tang AFC^2 : \tang gCG^2.$$

§. 513. Et in hoc theoremate a reflexione & dispersione radiorum abstraximus animum. Hac vero in calculum inducta erit

$$\eta : \lambda = \varkappa . \tang AFC^2 : \tang gCG^2.$$

§. 514. Hac ergo analogia dabitur ratio, quae est inter illuminationem directam & claritatem

ritatem imaginis in foco lentis, simul ac detur ratio $1 : \varkappa$, quae lentis impelluciditatem atque vim reflectentem denotat. Vidimus vero utplurimum fieri posse.

$$\varkappa . \tan AFC^2 = \sin AFC^2$$

Cumque angulus AFC rarissime sit $> 20^\circ$, pro obiectis, quorum semidiameter minor est 10° aut 15°, fieri proxime poterit

$$\eta : \lambda = AFC^2 : gFG^2.$$

Sic v. gr. si ponamus esse angulum $AFC = 15^\circ$, atque semidiameter solis adparens sit $\frac{1}{4}$ gr. erit

$$\eta : \lambda = 15^2 : (\tfrac{1}{4})^2 = 60^2 : 1 = 3600 : 1.$$

hoc ergo casu claritas imaginis solaris in foco lentis erit 3600 vicies maior claritate chartae, quam sol directe collustrat.

§. 515. Porro cum sit (§. 513.)

$$\eta : \lambda = \varkappa . \tan AFC^2 : \tan gCG^2.$$

erit

$$\varkappa = \frac{\eta . \tan gCG^2}{\lambda . \tan AFC^2}$$

Unde cum experimentis id effici possit ut sit $\eta = \lambda$, dabitur quoque $\varkappa$ per angulos gCG, AFC, atque hoc casu erit

$$\varkappa = \frac{\tan gCG^2}{\tan AFC^2}$$

Est vero

$$\tan gCG = \varphi F : FC$$

$$\tan AFC = AC : FC$$

unde

$$1 : \varkappa = AC^2 : \varphi F^2$$

Quodsi ergo lentis apertura ita coarctetur, ut claritas imaginis claritati vel illuminationi directae sit aequalis,

 erit

erit lumen in aperturam lentis incidens ad lumen refractum, quod nempe lentem transit, ut area aperturae lentis ad aream imaginis.

§ 516. Patet ergo hinc vel unico experimento determinari posse lumen quod a lente reflectitur & dispergitur, cuiusque summa est $= 1 - x$. Cum vero ratio $1 : x$ a ratione aequalitatis parum diuersa sit, patet & areas aperturae lentis & imaginis parum inter se fore diuersas. Unde experimentum ita instituere conuenit, ut utraque area tanta sit, quae commode mensurari possit. Difficilius enim & minus exacte mensurantur areae minores, quales forent imago solis, vel candelae vel lunae in foco lentis admodum convexae. Candelae flamma cum insuper variabilis sit ratione magnitudinis, huic scopo plane non sufficit, quia illuminatio directa ab ista magnitudine pendet, claritas imaginis perparum ab ea mutatur. En ergo quomodo rem adgrediendam esse censui.

EXPERIMENTVM XIX.

§. 517. In camera probe obscurata unicam apertam reliqui fenestram, qua lumini libere pateret ingressus. Caelum nubibus erat obductum ex omni parte aeque fere albidis. Parieti, qui ex aduerso fenestrae erat, affixi chartam albam, atque interposita lente caustica in charta ista excepi coeli per fenestram spectabilis imaginem. Cumque eiusdem lumen in ceteras partes chartae directe incideret, vidi lentem magna ex parte plano opaco esse

esse obtegendam, ut claritas imaginis illuminationi directae redderetur aequalis.

Circulus AB referat superficiem lentis, huius pars FBG plano opaco FGE sit obtecta, spatium AFG conuerti in circellum ipsi aequalem HI, ut instaurato experimento aperturam dare possem circularem lentique concentricam atque hoc modo experirer an ea sit haec apertura, quae claritatem imaginis illuminationi directae redderet aequalem. Quo facto dimensus sum distantias & rectas sequentes in pedibus rhenanis eorumque partibus decimalibus. Fig. 47.

Distantia GF $= 19{,}833$. Fig. 46.
CF $= 0{,}521$.
unde GC $= 19{,}312$.
porro.... AB $= 0{,}191$.
alitudo fenestrae $= 2{,}403$.
eius latitudo ... $= 1{,}722$.
hinc eius area $= 4{,}138$.
unde fit circulus
cuius diameter $g\gamma = 2{,}295$
similiter diameter imaginis φf - - - - $= 0{,}065$.
$DC = CE = 0{,}502$.
Diameter aperturae lentis $= 0{,}071$.

518. Cum iam sit (§.515.)

$$1 : x = AC^2 : \varphi F^2 = AB^2 : \varphi f^2$$

erit in experimento nostro.

$$1 : x = (0{,}071)^2 : (0{,}065)^2 = 71^2 : 65^2$$

adeoque proxime

$$1 : x = 37 : 31 = 6 : 5$$

ut adeo lens iſta partem luminis circiter ſextam reflectat & diſpergat, adeoque maxime ſit impura, minuſque polita.

§ 519 Porro ob

$$\text{tang } gFG = \frac{gG}{FG} = \frac{1{,}1475}{19.8330} = 0{,}057858 1.$$

eſt angulus vel ſemidiameter adparens

$$gFG = 3^\circ{,}18\tfrac{2}{3}'$$

unde

$$\sin gFG^2 = 0{,}003336$$

erit (§. 511) illuminatio directa

$$\lambda = 0{,}003336\ \pi.$$

§. 520 Similiter erit

$$\text{tang } AFC = \frac{955}{5210} = 0{,}1833013$$

unde $AFC = 10^\circ{,}23\tfrac{1}{3}'$.

ſimilique modo

$$GCg = 3^\circ{,}24'$$

Quare ob

$$\eta = \pi.\ \text{tang } AFC^2 \cdot \cos GCg^2$$

erit calculo ſubducto

$$\eta = 0{,}03356.$$

Quae eſt claritas imaginis, ſi lumen per totam lentem refringatur. Minuenda vero eſt in ratione areae totius lentis ad aream aperturae relictae, quam inueni eſſe ut 60 ad 7. Unde erit

$$\eta = 0{,}003915$$

At deberet eſſe $= \lambda = 0{,}003336$

differentia $= 0{,}000579$

Quae

Quae est circiter pas sexta luminis directi, vel septima eius quod in lentem incidit, atque a superficie & particulis heterogeneis reflectitur & dispergitur.

§. 521. Plurima sunt, quae hic notanda veniunt, quibusque paullo immorari & in sequentibus iuuabit. Primo enim, quod vel per se patet, experimento isto non modo determinatur quantitas luminis intercepti, verum & insuper palam fit, photometriae principia optume inter se cohaerere, atque experimentis firmari.

§. 522. Quod ad prius attinet, facili comparatione instituta ostendi potest, decrementum luminis, quod hic inuenimus esse sextam fere partem incidentis, cum eo quod in praecedenti capite determinauimus, optime congruere. Etenim politura & pelluciditas lentis, qua usus sum, a speculis supra adhibitis parum differebat. Quomodo vero instituendus sit calculus, qui lentibus adplicari debet, infra docebimus.

§. 523. Maximi quoque momenti est ista luminis in lentibus causticis amissi determinatio, cum plurima infra eaque grauissima occurrant experimenta, quae absque hac determinatione frustra instituuntur. Unde conuenit experimentum mox descriptum pluries atque curatius instituere, quo possit ex cunctis medium sumere ad verum quam maxime accedens. Cumque in sequentibus potissimum claritas contralis consideranda veniat, primo disquiremus, qua ratione claritas punctorum a centro F remotiorum decrescat. Hinc enim

patebit, quantus esse possit angulus φCF, antequam in spatio φf oculus discernere valeat quandam differentiam. Facile enim prospicitur, claritatem a centro F versus φ & f parum decrescere, nisi angulus AFC sit admodum notabilis.

§. 524. Sit itaque in g spatiolum infinite paruum $=1$, quantitas radiorum ex isto spatiolo in superficiem lentis vel eius aperturam adeoque & in spatiolum imaginis analogum f incidentium vocetur Q. Hic enim iterum a reflexione & dispersione radiorum abstrahimus, postea utriusque rationem habituri. Porro recordandum est quantitatem Q prodire eandem, siue particula g, siue superficies vel apertura lentis statuatur luminosa (§. 197. 196.) Unde erit (§. 207.)

$$Q = \tfrac{1}{2}\pi\left(1 - \frac{bb + xx - bb}{\sqrt{((bb+xx+bb)^2 + 4bbbb)}}\right)$$

Quae aequatio facile abit in sequentem

$$Q = \tfrac{1}{2}\pi\left(1 - \frac{(bb+xx+bb) - 2bb}{\sqrt{((bb+xx-bb)^2 - 4bbxx}}\right)$$

Sed est

$$gA^2 = bb + xx + 2bx + bb$$
$$gB^2 = bb + xx + 2bx + bb$$

Unde fit

$$bb + bb + xx = \tfrac{1}{2}(gB^2 + gA^2)$$
$$2bbxx = \tfrac{1}{2}(gB^2 - gA^2)$$

Qui-

Quibus valoribus substitutis, debitaque reductione facta prodit

$$Q = \tfrac{1}{2}\pi\left(1 - \frac{gB^2 + gA^2 - 4bb}{2.gB.gA}\right)$$

Est vero

$$\frac{gB^2 + gA - 4bb}{2gB.gA} = \text{cosin. } BgA$$

Quare

$$Q = \tfrac{1}{2}\pi(1 - \text{cos}.BgA) = \pi(\text{sin}\,\tfrac{1}{2}BgA)^2$$

§. 525. At vero area imaginis spatioli g est

$$\frac{CF^2}{CG^2} = \frac{Ff^2}{Gg^2}$$

Unde erit eius claritas

$$\eta = \pi.\frac{CG^2}{CF^2}(\text{sin}\tfrac{1}{2}BgA)^2$$

Quodsi ergo Lens AB in g spectetur, erit $\frac{1}{2}$ BgA eius semidiameter minor adparens, adeoque illuminatio η erit ut eius quadratum. Unde & hoc theorema valde analogum est theoremati Vto. (§. 109.)

§. 526. Angulus gCG rarissime est $> 20°$. Unde pro punctis imaginis centro vicinioribus assumemus $\frac{x}{b}$ esse ita paruam ut eius dignitates superiores contemni mereantur. Cumque porro ut plurimum & $\frac{b}{b}$ sit quantitas valde parua, formulam

$$Q = \tfrac{1}{2}\pi\left[1 - \frac{(bb + xx + bb) - 2bb}{\sqrt{((bb + xx + bb)^2 - 4bbxx)}}\right]$$

in sequentem contrahere licet,

$$Q = \tfrac{1}{2}\pi\left(1 - \frac{(bb+xx+bb)-2bb}{\sqrt{(bb+xx+bb)^2}}\right)$$

unde fiet

$$Q = \frac{\pi.bb}{bb+bb+xx} = \frac{\pi bb}{bb+bb} - \frac{\pi bbxx}{(bb+bb)^2} + \&c.$$

adeoque

$$\eta = \frac{\pi.AC^2.CG^2}{CF^2.GA^2} - \frac{\pi.AC^2.Gg^2.CG^2}{CF^2.GA^4.} + \&c.$$

Dicta ergo claritate centrali imaginis $= c$, erit

$$\eta = c\left(1 - \frac{Gg^2}{GA^2} + \&c.\right)$$

ut adeo decrementum claritatis sit proxime ut quadratum tangentis anguli gCG.

§. 527. Ponamus iam oculum & eas claritates aequales habere, quae vigesima parte differunt, erit

$$(\text{tang } gCG)^2 = \tfrac{1}{20} = 0{,}05$$

unde $\quad \text{tang } gCG = 0{,}2236$

Quare angulus gCG circiter $= 12\tfrac{1}{2}^{\circ}$ Tanta itaque esse poterit obiecti semidiameter adparens, antequam oculus in imagine quandam differentiam inter claritatem punctorum extremorum φf & eam, quae in centro F est, distinguere valet. Quoties ergo calculos prolixiores contrahere utile fuerit, eousque claritatem centralem ceu constantem assumere licebit. Sic vero habebimus (§. 500.)

$$\eta = \text{tang } AFC^2 : \text{sec } AGC^2$$

& pro obiectis velut infinite remotis

$$\eta = \text{tang} AFC^2$$

§. 528.

§. 528. Obiecta vero ceu infinite remota spectare licet, simul ac semidiameter aperturae lentis AC ratione distantiae GC, siue angulus AGC fuerit paruitatis contemnendae. Oculus certe claritates centrales confundet etsi fuerit sec $AGC^2 = \frac{21}{20}$, siue angulus AGC ad 12° usque excurrat. Unde utique compendio isto uti licebit, ubi AGC duos aut tres gradus non excedit.

§. 529. Obiter hic notabimus, dicta & ipsi oculo adplicari posse, cum simili plane modo definiatur claritas imaginis in eius retina depictae, similesque occurrant coni luminosi. Cumque apertura pupillae adeo parua sit, ut obiecta oculo ita admota, ut ob vicinitatem vix amplius distincte cerni possint, ceu infinite remota spectare liceat; hinc elucescit, cur obiectorum claritas visa ab earum distantia fere non pendeat, nisi ob alias caussas, veluti ob dispersionem radiorum in aere, minuatur. Euidens ergo hinc est differentia inter claritatem visam & illuminationem directam, quam maximam esse iam supra passim monuimus (.37.73.79.) At de his infra plura.

§. 530. Standum iam est promissis in superioribus factis, (§.64.74.84.) atque ostendendum, qua ratione principia Photometriae inter se cohaereant, atque experimentis firmentur. Vidimus, atque experimento XIX (§. 517.) euicimus, claritatem imaginis pendere a splendore obiecti & ab angulis AGC, AFC, eamque simpliciter reduci posse ad angulum AFC, simul ac obiectum fuerit remotus,

tius, minoremque habeat semidiametrum adparentem. Porro constat claritatem istam mutari posse, mutata tantum apertura lentis. Datur ergo medium imagines quotcunque ita immutandi, ut aeque clarae euadant, atque hoc facto, ex angulo AFC concludere datur, quaenam sit inter claritatem ipsorum obiectorum ratio. Ut adeo hae inter se comparari hoc modo possint. En ergo

EXPERIMENTVM XX.

Fig. 48. §. 531. Posita candela in L, in CD, AB collocentur duo plana alba, vel chartae, ita ut lumen candelae normaliter in utramque incidat. Quo facto vi experimenti VII. patet, singulas earum partes ad sensum aeque esse illuminatas, quoties anguli DLC, ALB fuerint 20 gradibus minores, quod facile obtinebitur, cum magnitudo chartae arbitraria sit. Porro in EF, FG collocentur duae lentes aeque conuexae, atque in HI excipiantur chartarum AB, DC imagines. Cum vero clarior sit imago I, quae prouenit a charta AB candelae viciniore, patet obtegendam esse lentem FG, siue minuendam esse eius aperturam, usque dum utraque imago aeque videatur clara. Quo facto, semidiameter aperturae cuiusuis lentis erit in ratione directa distantiae chartae respondentis a candela, siue area aperturae erit ut quadratum istius distantiae.

§. 532. Experimento hoc instituto positionem hanc reuera obtinere inueni. Sumsi vero distantiam chartae AB 10 digitorum parsinorum

rum, chartae DC $14\frac{1}{7}$ digitorum. Atque inveni lentis FG aperturam fuisse partem dimidiam lentis EF. Utriusque lentis a plano albo I H distantia erat 7 dig. & distantia candelae LH fere 5 pedum diameter aperturae EF $= 16\frac{3}{4}'''$, aperturae $FG = 11\frac{3}{4}'''$.

EXPERIMENTI RATIO.

§. 533. Dicta claritate charte $AB = C$, chartae $DC = c$, patet, fore

claritatem imaginis $I = C.(\tang \frac{1}{2}FIG)^2$
imaginis$H = c\ (\tang \frac{1}{2}EHF)^2$

At utraque claritas est aequalis, & ob aequalem utriusque lentis a plano HI distantiam, erit

$$\tang \tfrac{1}{2}FIC = \tfrac{1}{2}FG : gI$$
$$\tang \tfrac{1}{2}EHF = \tfrac{1}{2}FE : eH = \tfrac{1}{2}FE : gI$$

unde ergo

$$C.FG^2 = c.FE^2$$

siue

$$C : c = FE^2 : FG^2$$

At vero est (§. 48.)

$$C : c = LC^2 : LA^2$$

adeoque

$$FE : FG = LC : LA.$$

Quod cum verum sit, vi experimenti, constat Photometriae principia, quibus superstructus est calculus rata esse.

EXPERIMENTVM XXI.

§. 534. Chartam viciniorem in praecedenti experimento posui in K, ita ut utraque a candela aeque distaret, sed lumen candelae in chartam K oblique incideret, sub angulo 30°.

Quo

Quo facto minuenda erat apertura lentis EF, ut utraque imago redderetur aeque clara. Inueni vero aperturam lentis FG fuisse duplo maiorem apertura lentis EF. At ex principiis Photometriae consequitur, *posita distantia utriusque chartae a candela aequali, uniuersaliter aream aperturae debere esse in ratione reciproca sinus anguli incidentiae, simul ac fuerit* $eH = gI$.

DEMONSTRATIO.

Dicta claritate chartae DC $= c$, chartae K x, sinus anguli incidentiae in chartam K vocetur f, atque ob lumen in chartam DC sub angulo recto incidens erit (§. 53.)

$$c:x = 1:f$$

At ob $DH = KI$, & $eH = gI$ erit quoque claritas

$$H:I = (EF^2 c):(FG^2.x) = EF^2:(FG^2 f)$$

Sed est

$$H = I, \text{ unde}$$
$$EF^2 = f.FG^2$$

siue

$$1:f = FG^2:EF^2.$$

Quod erat demonstrandum.

§. 535. In utroque hoc experimento assumsinus distantias DH, BI, KI tantas, ut ratione diametri aperturae utriusque lentis pro infinitis haberi possint, eoque ipso calculus redderetur concinnior (§. 527. 528.) Porro ob eandem rationem lentes sumsi aequales, ut fieri posset $eH = gH$. Quodsi secus fuerit, de tangentibus angulorum EHe, FIg valebunt, quae de diametris aperturarum diximus.

EX-

EXPERIMENTVM XXII.

§. 536. Remota lente FG, utramque chartam D, K ita posui, ut earum distantia a candela L esset aequalis, & radii in utramque normaliter inciderent, sed alterius chartae K inclinatio ad planum HI esset obliquior, adeoque radii in lentem EF incidentes sub angulo recto minori emanarent. Quo facto nihilominus vidi, utriusque chartae imaginem H, h esse aeque claram.

§. 537. Patet ergo hinc obliquitatem emanationis claritatem imaginis non mutare, adeoque eandem esse radiorum densitatem, siue plus siue minus emanent oblique. Quod ipsum cum & de imagine obiecti in retina oculi depicta valeat (§. 529.) patet hinc experimenti praesentis cum iis consensus, quae in superioribus descripsimus (§. 74....84.) patetque porro, quod supra demonstrauimus (§. 87) superficiei luminosae obliquius positae substitui posse aliam, quae obiecto recta obuersa sit. Porro notandum est, in his experimentis perinde esse, siue maior siue minor sit lentis pelluciditas, dummodo in utroque priori (§. 531. 534.) ubi duae lentes adhibentur, utraque sit aeque diaphana, quod experiri licet, si eiusdem chartae DC imago in foco utriusque lentis excipiatur charta alba. Utraque enim aequalis videri debet, simulac anguli EHe, gIF fuerint aequales. Hi vero cum ab apertura lentium pendeant, facile ad aequalitatem reducuntur.

§. 538 Si radii per lentem refracti extra focum, v. gr. in RS excipiantur plano albo, Fig. 46.

ex

ex ſupra demonſtratis haud difficulter dabitur plani iſtius claritas, quae utique minor eſt claritate imaginis φf, atque vel maxime pendent a magnitudine obiecti adparente. Rem vero omnem ſic expedire licet.

§. 539. Supra iam vidimus, poſt lentem eſſe infinitos conos luminoſos, quorum baſis communis eſt apertura lentis, apices vero ſunt in ſuperficie curua, cui ſuperficiem ſphaericam radio CF deſcriptam ſubſtituere licet. Quatenus vero angulus φCF eſt paucorum graduum, planum φf absque notabili errore eius vicem ſuſtinet. Ex his conis qui medius eſt AFB baſi normaliter inſiſtit, ceteri omnes ſunt plus minuſue obliqui. Horum extremi ſint AφB, AFB. Porro quilibet eorum planum SR tranſit, ita ut in iſto medius AFB abſcindat circulum cuius diameter eſt NQ centrum in ipſo axe lentis in M. Ceteri coni pariter abſcindent circulos medio iſti aequales, ſed excentricos. Unde in plano SR dabitur ſpatium circulare, cuius diameter eſt qn, quodque ſingulis iſtis circulis eſt commune. Huius ſpatii claritas maxima eſt, quia ex omnibus conis radii in iſtud incidunt. Contra ea claritas ab n verſus R & a q verſus S decreſcit, atque in punctis extremis R, S, euaneſcit.

§. 540. Etſi ergo lumen in plano RS inaequaliter diſſeminetur, attamen ſpatium medium qn aeque illuminatur, ac ſi omnes iſti coni cum medio AFB coinciderent. Adeoque dabitur ſpatii iſtius qn claritas, ſi quantitas radiorum, qui per lentem tranſeunt qui-

quique in foco ϕf coincidunt, per aream circuli diuidatur, cuius diameter est NQ.

§. 541. Vidimus vero supra (§. 497.) esse

$$q = \frac{\pi\pi . Gg^2 . AC^2}{gP^2}$$

unde dicta claritate in qn $= \dot{\eta}$ erit

$$\dot{\eta} = \frac{\pi Gg^2 . AC^2}{gP^2 . NM^2}$$

Est enim area circuli NQ $= \pi . NM^2$

§. 542. Claritas haec in eadem ratione minuenda est, qua ob reflexionem & refractionem lumen per lentem refractum minuitur. Ceterum probe notandum est, aucta distantia CM decrescere diametrum nq, ut tandem euanescat in V, ubi latera conorum extremorum Af, Bϕ axin secant. Unde formula eruta ultra distantiam CV extendi nequit

§. 543. Eo vero maior erit haec distantia, quo maior est apertura lentis, quo minor diameter imaginis. Quodsi ergo ϕf fuerit imago solis vel lunae, atque angulus AFC 10 aut plurium graduum, punctum V. centro F adeo erit vicinum, ut distantia VF fere sit nulla.

§. 544. Simili modo pone focum F datur punctum v, ipsi V analogum. Atque translato plano SR in qn, dabitur in sr spatium circulare, a cunctis conis luminosis collustratum. Eadem vero ratione inuenitur eius claritas

$$\ddot{\eta} = \frac{\pi . Gg^2 . AC^2}{gP^2 . (nm)^2}$$

§. 545. Quodsi utraque haec claritas cum claritate imaginis in foco (§. 497.)

$$\eta = \frac{\pi . Gg^2 AC^2}{gP^2 . \varphi F^2}$$

comparetur, patebit esse

$$\eta . \varphi F^2 = \eta' . MN^2 = \eta'' . (mn)^2$$

Fig. 49. §. 546. Si lens fuerit concaua ACB, constat ex Dioptricis, focum eius virtualem siue imaginarium esse inter lentem & obiectum in F. Etsi vero in φf nulli radii incidant, attamen radii e quouis puncto obiecti g per conum luminosum AGB in superficiem lentis incidentes ita per eam refringuntur, quasi cuncti e puncta f emanarent, conumque luminosum constituerent, qui est RAfBQ.

§. 547. Ponamus iam radios per lentem AB refractos in M excipi plano LMH. In hoc plano singuli coni LφS, NFQ RfH circulos abscindent aequales sed excentricos, atque spatium circulare, cuius diameter est RS omnibus erit commune. Hoc ergo spatium aeque illuminabitur, ac fieret, si omnes isti coni coinciderent. Unde dabitur eius claritas, quantitatem radiorum in lentem incidentium per spatium circuli QN diuidendo.

§. 548. Fiat ut supra (§. 497.) gK = gA, atque bifariam secetur KB in P, erit gP = ½ (gA + gB) unde dicta quantitate radiorum in lentem incidentium q, claritate spatii RS = η erit (§. 222.)

$$q = \frac{\pi\pi . Gg^2 AC^2}{gP^2}$$

unde

unde

$$\eta = \frac{\pi . Gg^2 . AC^2}{gP^2 . MN^2}$$

Est enim $\pi . MN^2$ basis conorum LφS, NFQ &c. per quam quantitas radiorum est diuidenda.

THEOREMA XXX.

§. 549. *Si lumen obiecti per lentem concauam AB refractum in M excipiatur plano HL ad axin lentis normali, erit illuminatio spatii RS, ad illuminationem absolutam, ut factum ex area obiecti in aream lentis ducta ad factum ex area baseos conorum NFQ in aream circuli ducta, cuius semidiameter est gP siue medium arithmeticum inter latera coni extremi* gB, gA.

DEMONSTRATIO.

Haec plane eadem est ac demonstratio theorematis vigesimi quarti. (§. 498.)

§. 550. Sit ABE sphaera vitrea vel pellucida, cuius apertura sit AB. Obiectum circulare gGγ, cuius imago in foco F excepta sit φf. Dicatur iterum quantitas radiorum in aperturam AB incidentium $= q$, claritas imaginis $= \eta$. Ductis lateribus coni extremi gA, gB, fiat gK $=$ gA, bifariam secta KB in P erit

$$gP = \tfrac{1}{2}(gA + gB)$$

Unde (§. 222.)

$$q = \frac{\pi\pi . Gg^2 . AD^2}{gP^2}$$

adeoque ob aream imaginis $=\pi,\varphi F^2$, & $\eta = \frac{q}{\pi.\varphi F^2}$ erit

$$\eta = \frac{\pi Gg^2.AD^2}{gP^2.\varphi F^2}$$

Et hic ergo valebit Theorema XXIVtum, una cum corollariis ipsi adnexis. (§. 499. seqq.)

§. 551. Ceterum in his calculis nullam rationem habuimus luminis, quod a superficiebus vitri reflectitur, & dispersione amittitur. Huius vero quantitas satis erit notabilis, si sphaerae diameter fuerit aliquot digitorum, atque apertura AB ad 20 aut 30 gradus ascendat. Quantum vero hinc oriatur claritatis imaginis decrementum experimento exploratur, quod undevigesimo supra descripto (§. 517.) plane simile est.

§. 552. Cum sit

$$Gg : \varphi F = GC : CF$$

erit substitutione facta

$$\eta = \frac{\pi.GC^2.AD^2}{gP^2 CF^2}$$

Compleatur rectangulum aCDA, atque nectantur puncta a, F recta aF. Porro fiat ut supra (§. 499.)

$$GC : gP = \text{cosin } \omega$$

atque erit

$$\eta = \pi.\text{tang } aFC^2.\ \text{cosin } \omega^2$$

siue

$$\eta = \frac{\pi.\text{tang } aFC^2}{\text{sec } \omega^2}$$

§. 553.

§. 553. Ponamus obiectum esse infinite remotum, atque quaerenda sit claritas centralis in F, erit sec. $\omega = 1$. unde

$$\eta = \omega.\text{tang}\ aFC^2 = \pi AD^2 : CF^2$$

Sit semidiameter sphaerae $AE = e$, erit hoc casu $CF = \frac{3}{2}e$, unde

$$\eta = \tfrac{4}{9}\pi.AD^2 : e^2$$

§. 554. Quodsi iam a sphaera abscindatur pars posterior AEB, ut remaneat lens plano conuexa ADBHA, erit (§ 499.) posito itidem obiecto infinite remoto, claritas centralis

$$\eta' = \pi AD^2 : DF^2$$

At vero hoc casu erit distantia focalis

$$DF = 2e$$

unde

$$\eta' = \pi.AD^2 : 4e^2$$

Erit ergo

$$\eta : \eta' = \tfrac{4}{9} : \tfrac{1}{4} = 16 : 9$$

siue

Claritas centralis in foco sphaerae HE erit ad claritatem centralem in foco lentis plano conuexae AHBD ut 16 ad 9.

§. 555. Quodsi vero lens fuerit utrinque aeque conuexa, erit

$$DF = e$$

Quare

$$\eta : \eta' = \tfrac{4}{9} : 1 = 4 : 9 = 16 : 36$$

Unde *claritas centralis sphaerae, lenti plano conuexae & lenti utrinque aeque conuexae debita erit ut numeri 16, 9, 36.* Per se vero patet lentes istas debere esse huius ipsius sphaerae segmenta, aperturam requiri eandem, obiectum idem atque

infinite remotum, atque animum hic abſtrahi a lumine reflexo & diſperſo, quippe cuius quantitas in ſphaera ob maiorem craſſitiem maior eſt.

§. 556. Theorematum hactenus erutorum ampliſſimus in experimentis photometricis eſt uſus, unde ne nimis augeatur libri moles, ſingulis caſibus ſpecialibus iſta non adplicabimus, cum iſta adplicatione nil ſit facilius. Plurima huc ſpectantia reperies in ſyſtematibus opticis virorum profundae indaginis SMITHII & KAESTNERI. Similiaque ingenioſiſſimus EVLERVS in Commentariis Academiarum Imperialis & Regiae, quae PETROPOLI & BEROLINI florent cum orbe erudito communicauit, theoriae luminis curatius euoluendae praeprimis intentus. Cancti vero a quantitate luminis reflexi & diſperſi animum abſtraxerunt, & correctione indigere ſummi EVLERI de proprio imaginis ſplendore placita infra videbimus.

§. 557. Praecipui vero caſus, quibus vulgo adplicari poſſunt iſta theoremata, ſunt *Camera obſcura, laterna magica* & *microſcopium ſolare*. Huc quoque referas experimentum a cel. BOVGVER in tractatu iam paſſim laudato (§ 315. 360. 468. 475) deſcriptum, quo lumen ſolis & lunae lente concaua exceptum ita debilitavit, ut cum lumine candelae comparari ipſique aequari poſſet.

§ 558. Porto vel me tacente, euidens eſt, ope lentium conuexarum determinari poſſe lumen a tabulis vitreis planis reflexum & refractum. Definita enim quantitate radiorum,

quos

quos lens ipsa reflectit & dispergit, pone lentem in RS vel ante eam collocentur tabulae vitreae quotlibet, atque haud secus ac in Experimento XIX. supra descripto factum est (§.517.) inuenietur debilitatio claritatis in F, siue lumen a lente & a tabulis istis reflexum & dispersum. Ab hoc subtrahendum erit decrementum, quod ipsi lenti debetur, ut tandem habeatur illud, quod a tabulis istis prouenit. Alia experimenta huc spectantia, quae rariora sunt, infra occurrent, cum de ea claritate agetur, quae obiectis illuminatis inest. Fig. 46.

CAPVT IV.

De lumine per plures lentes refracto, vel ab eadem lente pluries reflexo & refracto.

§. 559. Hactenus istud tantum lumen calculo & experimentis perlustrauimus, quod unicam lentem peragratur, atque in focum eius coincidit, ibique obiecti imaginem depingit, quam *primariam* vocare haud incongruum erit. At vero cum lumen in superficies lentis incidens iterum reflectatur, iam in vulgus notum est, imaginem istam non esse unicam, verum insuper alias dari numero velut infinitas. Ex his facile quatuor in oculos incurrent, si lentem AB intra lumen L & oculum O ita ponas, ut radii La obliquius incidant, varieque reflexi & refracti secundum rectas aO, bO, cO, dO obliquius iterum in oculum O incidant. Quodsi vero ima- Fig. 51.

imagines iſtae charta excipiantur duae tantum viſibiles erunt, quarum altera eſt primaria iſta, quae pone lentem in foco exſtat, altera a parte antica per reflexionem viſibilis erit. Ceterae omnes debiliores ſunt, atque ibi ſeſe ſiſtunt, ubi a lumine quod in utramque priorem incidit veluti obſcurantur, viſuique ſubducuutur (§. 15.)

§. 560. Ut vero diſtantias iſtorum focorum calculo quodammodo proſequamur, eas exhibebimus pro radiis axi vicinioribus, ipſique parallelis, atque inſuper craſſitiem ponemus eſſe velut infinite paruam, ut faciliores aſſequamur formulas, quippe prolixiores hic fere ſuperfluae ſunt.

§. 561. Per ſe vero patet, omnes iſtos focos deberi reflexioni luminis quae intra lentem fit, dum lumen ab altera eius ſuperficie interiore ad alteram ſucceſſiue reflectitur, haud ſecus ac iſtud intra tabulas vitreas planas reflecti ſupra vidimus (§. 320. 339.) Cum vero hoc caſu ſuperficies lentis ſint ſphaericae, via iſta luminis reflexi aliter erit determinanda.

Fig. 52. §. 562. Sit ergo VE lens utrinque conuexa, aF eius axis, ſemidiameter conuexitatis anterioris vD ſit $= Df = f$, poſterioris VD ſit $= DF = F$. P namus iam lumem per rectam wV incidere in ſuperficiem poſteriorem V, pars eius refracta perget per rectam VG, ibique in G focum conſtituet. Pars reliqua per Vv regreditur, atque in v in ſuperficiem anteriorem incidit, ubi denuo ex parte reflectitur, & ex parte refringitur. Refractum tranſeat vitrum ſecundum directionem vC, in C axin interſecet

ſecet, ibique focum anteriorem conſtituat. *Detur iam diſtantia foci poſterioris* DG, *atque quaerenda ſit diſtantia anterioris* DC.

§. 563. Quod ut fiat producantur

rectae	Vw′	Ut ſint	aVwA
	Vv	- - -	bVvβB
	vC	- - -	Cvc

Porro ducantur FV, fv, atque fiat

$$DV = 1$$
$$Df = f$$
$$DF = F$$
$$aD = a$$
$$DC = x$$
$$DG = y$$

Denique centris V, v, radiis VF, vf deſcribantur arcus AFB, cbf, qui erunt infinite parui, cum puncta V, v ſint axi infinite vicina, & radii AV, VG, Vβ, vC ipſi fere paralleli (§. 560.)

§. 564. At iam per principia dioptrices eſt

$$AF = FB,$$
$$fc : fb = 3 : 2$$

Porro ob

$$aD : DV = aF : AF$$

erit

$$AF = FB = \frac{a + F}{a}$$

Similiter ob

$$(VD + FB) : DF = VD : D\beta$$

habetur

$$D\beta = \frac{aF}{2a + F}$$

Porro ob

$$D\beta : DV = \beta f : fb$$

erit

$$fb = \frac{f(2a+F)+aF}{aF}$$

unde &

$$fc = \frac{3f(2a+F)+3aF}{2aF}$$

Denique ob

$$(fc - DV) : fD = DV : DC$$

eſt

$$x = \frac{2afF}{3f(2a+F)+aF}$$

Qua ergo aequatione datur relatio inter diſtantias Da, & Dβ.

§. 565. Porro producta recta FV in I, centro V, radio VG deſcribatur arcus GHI in H rectam Va ſecans, eritque per principia Dioptrices

$$IG:IH = 3:2$$

unde

$$GH = \tfrac{1}{3}GI.$$

Sed eſt

$$FD:DV = FG:GI$$

unde

$$GI = \frac{F+y}{F}$$

adeoque

$$GH = \frac{F+y}{3F}$$

Porro ob

$$aD:DV = aG:gH$$

erit

erit

$$gH = \frac{a-y}{a}$$

adeoque

$$\frac{F+y}{3F} = \frac{a-y}{a}$$

unde

$$a = \frac{3Fy}{2F-y}$$

Quo valore in aequatione ante reperta (564.)

$$x = \frac{2afF}{3f(2a+F)+aF}$$

ſubſtituto, tandem prodit

$$x = \frac{2fFy}{2fF+5fy+Fy}$$

§. 566. Sic ergo datur relatio inter diſtantias focorum proxime ſibi ſubſequentium G, C. Quodſi ergo focus proxime ſequens ſit K, facile pater huius diſtantiam DK haud abſimili modo dari per diſtantiam DC, hoc tantum diſcrimine ut radii conuexitatis F, f ſibi inuicem ſint ſubſtituendi. Sic enim dicta diſtantia $DK = y'$, prodibit

$$y' = \frac{2fFx}{2fF+(5F+f)x}$$

§. 567. Quodſi iam iterum focus ſubſequens ſit in L, dicta diſtantia $DL = x'$ patet fore

$$x' = \frac{2fFy'}{2fF+(5f+F)y'}$$

Ut adeo diſtantias vel radios F, f debite alternando ſucceſſiue reperiantur, diſtantiae focorum ſubſequentium y'', x'', y''', x''' &c.

§. 568.

§. 568. Sit ergo diſtantia obiecti $= d$, atque ponamus focum primarum eſſe in G, conſtat ex principiis dioptricis, fore

$$y = \frac{2fF}{(f+F) - 2fF:d}$$

Quodſi ergo hic valor in aequatione (§. 565.)

$$x = \frac{2fFy}{2fF + (5f+F)y}$$

atque porro valor ipſius x in aequatione (§. 566.)

$$y' = \frac{2fFx}{2fF + (5F+f)x}$$

ſucceſſiue ſubſtituantur, continuata hac ſubſtitutione in valoribus focorum ſubſequentium prodibit diſtantia foci

primarii $DG = y = \frac{2fF}{F+f-2fF:d}$

ſecundi $DC = x = \frac{fF}{3f+F-fF:d}$

tertii $DK = y' = \frac{2fF}{7(F+f)-2fF:d}$

quarti $DL = x' = \frac{fF}{6f+4F-fF:d}$

quinti - - - $= y'' = \frac{2fF}{13(F+f)-2fF:d}$

ſexti - - - $= x'' = \frac{fF}{9f+7F-fF:d}$

&c.

§. 569. Adeoque in genere erit diſtantia foci

(2n

$(2n+1)^{ti}$ pone lentem

$$Y = \frac{2fF}{(6n+1).(F+f) - 2fF:d}$$

$(2n+2)^{ti}$ ante lentem

$$X = \frac{fF}{(3n+3)f + (3n+1)F - fF:d}$$

§. 570. Si fuerit $f = F$, siue posita lente utrinque aeque conuexa, utraque formula ita contrahetur ut in genere pro foco $(m+1)^{to}$ sit eius distantia

$$= Y \text{ siue } = X = \frac{f}{3m+1-f:d}$$

adeoque erit.

$$y = \frac{f}{1-f:d} \quad x = \frac{f}{1-f:d}$$

$$y' = \frac{f}{7-f:d} \quad x' = \frac{f}{10-f:d}$$

$$y'' = \frac{f}{13-f:d} \quad x'' = \frac{f}{16-f:d}$$

&c &c

§. 571. Quodsi insuper obiectum ponatur infinite remotum erit $f:d = 0$, adeoque focorum distantiae successiue erunt $f, \frac{1}{4}f, \frac{1}{7}f, \frac{1}{10}f, \frac{1}{13}f$ &c. In singulis vero istis casibus distantiae istae decrescunt in progressione harmonica, siue ut ordinatae hyperbolae intra asymtotos aeque distantes.

§. 572. Distantiae istae breuissime constructione reperiuntur. Quod ut ostendamus, aequationes (§. 565. 566), quibus exprimitur x per y & y' per x ita immutabimus, ut sit

$x =$

$$x = \frac{y.2fF:(5f+F)}{y+2fF:(5f+F}.$$

$$y = \frac{x.(2fF:(5F+f,)}{x+2fF:(5F+f)}.$$

Fig. 53. Sit iam lens in D, eius axis ſit GC, radius conuexitatis maior $=F$ minor $=f$ atque lens ita ſit poſita ut ſuperficiem magis conuexam ipſi C obuertat. Fiat iam

$$DA = AB = 2fF:(5F+f)$$
$$DH = HE = 2fF:(5f+F)$$

atque praeparatio ad conſtructionem erit facta. Ponamus obiectum eſſe a parte ipſius DC, atque focum primarium cadere in G, ita ut dicta diſtantia obiecti $=d$, ſit

$$DG = \frac{2fF}{F+f \quad 2fF:d}$$

§. 573. Diſtantiae focorum ſequentium ita reperientur.

1°. Ducta GcE transferatur Dc in DC, erit C focus ſecundus ſiue primus eorum, qui cadunt intra lentem & obiectum.

2°. Ducta BC, transferatur Dk in DK, erit K focus tertius, ſiue ſecundus pone lentem.

3°. Ducta KE, tranferatur Dl in DL erit L focus quartus, ſiue ſecundus ante lentem.

4°. Ducta LB, transferatur Dm in DM erit M focus quintus.

Simili porro modo & ceteri inuenientur.

§. 574. Diſtantia foci primarij eadem eſt, utram lentis ſuperficiem obiecto obuertas, manente nempe eius a lente diſtantia. Contra ea diſtantia focorum ſequentium mutatur, inuerſa lentis poſitione, quoties non fuerit aeque

aeque conuexa. Cum ergo duae diſtantiae DG, DC experimentis detegi poſſint, dabitur hinc methodus conuexitatem lentis experimentis determinandi, quam vero hic praetergredimur, cum totus hic calculus ad Dioptricam pertineat.

§. 575. Magnitudo ſingularum imaginum eſt in ratione diſtantiae focorum ſimplici, ſi diametros, duplicata vero, ſi areas ſpectes; atque ex ſuperioribus conſtat, definitum iri earum claritatem, ſi quantitas radiorum in eas incidentium per aream diuidatur. Cum vero lumen omne in lentem incidens intra eam ſucceſſiue diuidatur, quaerendum eſt, quota eius pars cuiuis imagini illuminandae inſeruiat.

§. 576. Quod ut proxime aſſequamur, compendio quodam utemur, ponendo omne lumen in lentem incidens, atque intra eam ultra citraque reflexum, in ſuperficies normaliter incidere, quod vel ideo aſſumere licet, quia quantitas luminis reflexa & refracta non multum euadit diuerſa, etſi angulus incidentiae a recto vel decem pluribusue gradibus differat (§. 443.)

§. 577. His ita poſitis ex ſuperioribus reſumemus valores & ſignificatum literarum $q, p, n, m, e, v, c, \gamma$, poſitoque lumine in lentis ſuperficiem obiecto obuerſam incidente $= 1$, erit (§. 443. 467. 469. 472.)

$$q = 0{,}0199$$
$$p = 0{,}0448$$
$$m = 0{,}9552$$
$$n = 0{,}9801$$
$$mn = 0{,}9362$$

log

$\log e = 1,$

$v = e^{-c:7} = e^{-2:13}$

siue sumtis logarithmis Briggianis

$\log e = 0,4342945$

$-\log v = 0,0666607$

unde $v = 0,8577.$

§. 578. Incidat ergo lumen $= 1$ insuperficiem lentis anteriorem externam, reflectetur eius quantitas $q = 0,0199$. pars reliqua $n = 0,9801$ ingreditur lentem, atque dum eius crassitiem percurrit debilitatur, ut in superficiem interiorem posticam tantum incidat quod reliquum est $= nv$. Cum vero & hic pars eius $= nvp$ reflectatur ad superficiem anteriorem regressura, pars altera nvm refracta conuergit in focum primarium, ut adeo quantitas radiorum in istum incidentium sit $= nvm = 0,8030$.

§. 579. Pars altera dum ad superficiem anteriorem regreditur, iterum debilitatur dispersione, ut in superficiem istam incidat lumen reliquum nv^2p. Hoc iterum diuiditur ut pars reflexa sit $= nv^2p^2$, refracta $= nv^2pm$ a qua pendet imaginis primae claritas. Est vero, subducto calculo, quantitas ista $= 0,03085$.

§. 580. Pars reflexa nv^2p^2 ad superficiem posteriorem regrediendo dispersione euadit $= nv^3p^2$, ibidemque reflectitur nv^3p^3, refringitur nv^3p^2m. Pars haec refracta in secundum focum posticum coincidit, estque $nv^3p^2m = 0,00128$.

§. 581.

§. 581. Simili porro ratiocinio inuenitur quantitas luminis in focum secundum anteriorem, atque in quotcunque sequentes incidens, quippe quantitates istae seriem geometricam constituent vehementer conuergentem

$$nmv,\ nmvp^2,\ nmv^3p^2,\ nmv^4p^3,$$

Erit ergo v. gr. quantitas luminis quae in focum secundum anteriorem incidit $= nmv^4p^3 =$ 0,0000455.

§. 582. Notandum tamen claritatem imaginum ultimarum maxime pendere a gradu pelluciditatis lentis, quam hic assumsimus, ut in capite secundo huius Partis pro tabulis vitreis mediocriter pellucidis eam determinauimus. Unde calculus, quem hic instruimus, numericus ad lentes quascunque temere non est extendendus. Quam ipsam ob caussam eum tantum ad casum specialem eumque simpliciorem adplicabimus.

§. 583. Ponemus nempe lentem utrinque aeque conuexam, unde fiet $f = F$. Porro distantiam obiecti d sumemus esse infinitam. Quo posito distantia focorum erit

$$f,\ \tfrac{1}{4}f,\ \tfrac{1}{7}f,\ \tfrac{1}{10}f,\ \tfrac{1}{14}f,\ \&c.$$

§. 584. Quaerenda iam sit claritas imaginis solaris in singulis istis focis. Cum hoc casu angulus incidentiae maxime obliquus ab angulo recto parum discrepet, absque notabili errore assumere licebit diametros imaginum esse in ratione simplici directa distantiae focorum. Unde *claritas cuiusuis imaginis erit directe ut quantitas luminis in eam incidentis, reciproce ut quadratum distantiae imaginis siue foci a lente.*

§. 585. Dicta ergo claritate imaginis primariae post lentem $= \lambda$, erit claritas imaginis

primae anterioris $= 16\lambda vp$
secundae posterioris $= 49\lambda v^2p^2$
secundae anterioris $= 100\lambda v^3p^3$
tertiae posterioris $= 196\lambda v^4p^4$ &c.

§. 586. Quodsi iam ponamus esse $v = 0,8577$, erit $pv = 0,038425$. adeoque habetur claritas imaginis

primariae post lentem $= \lambda$
primae anterioris $= 0,6148.\lambda$
secundae posterioris $= 0,072355\lambda$
secundae anterioris $= 0,005673\lambda$
tertiae posterioris $= 0,0004273\lambda$.
&c.

§. 587. Reliquum ergo est, ut claritatem imaginis primariae definiamus. Quem in finem ponemus solis semidiametrum adparentem esse $= 16'$, porro ut in experimento XIX. (§. 517) angulum AFC assumemus esse $= 10°$, $23'$. Unde ob distantiam solis velut infinitam, vi theorematis XXVI (§. 501.) erit

Fig. 46.

$$\lambda = \pi.(\cos. 16')^2. \text{tang}(10°{:}23')^2$$

siue

$$\lambda = 0,03357. \pi.$$

At haec claritas ob dispersionem & reflexionem radiorum adhuc minuenda est in ratione $1{:}nvm = 0,8030$. Unde erit claritas imaginis

primariae post lentem $= 0,02695.\pi$.
primae anticae - - - $= 0,01652.\pi$
secundae posterioris $= 0,00195.\pi$
secundae anterioris $= 0,00015.\pi$
tertiae posticae - - - $= 0,00001.\pi$
&c.

Sed

Sed illuminatio directa est

$= (\sin 16')^2 \; - - - = 0{,}00002.\pi.$

Unde quatuor imaginum priorum quaelibet illuminatione directa adhuc clarior est.

§. 588. Videmus ergo hinc, utramque imaginem primariam G, C parum inter se differre, sequentes vero KLM &c. his vehementer esse obscuriores. Facile vero patet, quam ob rem istae sint ut plurimum inuisibiles, cum ibi sese sistant, ubi lumine, quod in primarias incidit, quodque longe est densius, offunduntur. Ceterum cum istae hoc casu sint valde exiguae, & hoc obstat, quo minus obseruare istas oculisque subiicere liceat. Utramque vero imaginem primariam parum inter se differe experimentis facile probatur. Caue tamen hinc concludas haud quoque diuersam esse vim ustoriam. Cum enim imago in C sedecies minor sit imagine K, idem erit effectus, ac si lentem adhiberes cuius distantia focalis esset $= \frac{1}{4}$ CF, angulo AFC ita imminuto ut euaderet (§. 587.) Fig. 52. Fig. 46.

$AC^2 : AF^2 = 0{,}01652.$

Dudum vero iam constat, lentes quae sunt segmenta sphaerae minoris, eandem in foco claritatem producentes, minori tamen vi caustica gaudere. Ab experientia plane non abhorrere calculum, quem hic pro inuenienda claritate instruximus, sequenti modo exploratum dabo.

EXPERIMENTVM XXIII.

§. 589. Simili modo, quo in experimento undeuigesimo (§. 517.) in camera probe obscu- Fig. 54.

ſcurata unicam apertam reliqui feneſtram, quae ſit gGγ, cum caelum nubibus obductum eſſet aeque albidis. Ab ea 15. pedd. recedendo in AB collocaui lentem utrinque conuexam eandemque, quam in experimento citato adhibui, ita ut axis lentis FG per mediam feneſtram tranſiret. In fFφ charta alba excepi coeli per feneſtram ſpectabilis imaginem, ut quanta haec eſſet viderem. Quo facto reliquas chartae partes reſecaui, ut tantum ea relinqueretur pars, quae excipiendae imagini ſufficeret, potiuſque minor eſſet. Similique modo in foco anteriore K collocaui chartam aeque albidam, neque maiorem quam quae capiendae imagini ſufficeret. Cum iam obſeruarem imaginem in fφ aliquantum clariorem eſſe anteriore in kK, ſuperficiei lentis poſteriori ADEB ſucceſſiue adplicaui aperturas minores DE uſquedum utraque imago aeque videbatur clara, inuenique proxime fuiſſe AB : DE $=$ 4 : 3.

EXPEIMENTI RATIO ET CAVTELAE.

§. 590. Utramque chartam φf, $\varkappa$k areae imaginis coaequaui, ne poſterior φf nimium lumen in priorem $\varkappa$k reflecteret, neue prior lumen in lentem incidens nimis quam interciperet. Illud neceſſario cauendum eſt quantum licet. Hoc vero, etſi lumen interceptum utramque claritatem ita minuat, ut ſalua ſit ratio inter lumen reflexum & refractum, nihilominus tamen cauendum eſt, cum difficilius exacte dignoſcatur aequalitas inter duas claritates obſcuriores (§. 265. ſeqq.) Porro quod in

in omnibus experimentis obſeruaui, niſi expreſſe moneatur contrarium, utraque charta non erat tenuis lumenque tranſmittens, verum craſſior, ſiue quod aiunt multiplex conglutinata, albiſſima at minus polita. Opacam enim utramque praecipue vero eam eſſe debuiſſe, quam in K collocaui, facile obuium eſt, cum alias charta K lumen per feneſtram in eam incidens ex parte tranſmiſiſſet, adeoque imaginis claritatem auxiſſet vel eam potius viſui ſubduxiſſet. Lumen caeli per feneſtram irruens lumini ſolari vel candelae praetuli, quo imaginem praecipue eam quae in K excipiebatur, maiorem magiſque viſibilem redderem. Etenim imago ſolis in k inſtar puncti fuiſſet, cuius certe claritas aegre diiudicari potuiſſet, cum ſpatium quod in retina oculi occupat ob eandem cauſſam maius ſit, quae viſionem puncti confuſam reddit. Aperturam ſuperficiei lentis poſteriori adplicatam, lumen in focum F incidens huiuſque imaginis claritatem minuere, imagini vero, quae in K eſt atque lumini reflexo debetur, non officere, eiusque claritatem ſaluam atque integram relinquere, vel per ſe eſt manifeſtum. Ceterum cum utriusque imaginis claritas diuerſo modo pendeat ab impelluciditate lentis (§ 585.) utique alia adhibita lente alia quoque prodibit ratio inter diametros aperturarum AB, DE. Denique ex ſuperioribus conſtat, remota apertura DE, claritatem imaginis φf auctam iri in ratione areae aperturae DE ad aream aperturae AB, adeoque ut $3^2 : 4^2 = 9 : 16 = 0,56 : 1$. Haec vero ratio ab ea, quam

quam ex calculo deduximus, quaeque est $= 0{,}6148 : 1$ (§ 586.) tantum parte $\frac{1}{14}$ differt.

Fig. 53. §. 591. Lumen quod in focos lenti propiore K, L, M &c. incidit ibique obiecti imaginem depingit, claritatem primariarum G, C parum auget plurimisque casibus in calculo tuto omitti potest. Vidimus enim lumen in punctum quoduis imaginis K incidens vix esse partem $\frac{1}{17}$ eius, quod coincidit in punctum imaginis G (§. 587.) At insuper mirum in modum debilitatur ob diuergentiam. Ponamus v. gr. focum primarium esse in m; huic proximus sit in F, patet ex superioribus lumen
Fig. 46. in spatium $\phi F f$ incidens ita diuergere, ut in toto spatio qn sit disseminatum (§. 544.) Eo ergo erit debilius, quo maior est apertura lentis quoque minor obiecti semidiameter adparens.

§. 592. Sit haec semidiameter $gCG = \gamma$, erit semidiameter imaginis primariae $= Cm.\ \text{tang}\ \gamma$, secundariae $= \frac{1}{7}\ Cm.\ \text{tang}\ \gamma$ (§ 583.) Porro ob $CF = \frac{1}{7} Cm - \frac{1}{6} Fm$, erit $mq = 6.\ AC$. Debilitabitur ergo lumen imaginis F, dum in m peruenit, ut spatium $36.\ AC^2.\pi$ ad spatium $\frac{1}{49}.\ Cm^2.\text{tang}\ \gamma^2.\pi = (36.49.AC^2) : (Cm^2.\text{tang}\ \gamma^2)$. Est vero $AC : Cm$ tangens semidiametri lentis in m visae adparentis, quae si dicatur $= \omega$, erit debilitatio in ratione

$$= 36.\ 49.\text{tang}\ \omega^2 : \text{tang}\ \gamma^2$$

§. 593. Angulus γ fere nunquam est $> 20^2$, ponendo ergo $\text{tang}\ \gamma = \frac{1}{3}$, erit debilitatio

$$= 36.9.49.\text{tang}.\omega^2 : 1$$

Sit iam claritas imaginis primariae $m = 1$, claritas imaginis secundae F erit $\frac{1}{17}$. Haec vero dum in m peruenit, ita debilitatur ut iam sit

1

$$= \frac{1}{13.\ 36.\ 9.\ 49.\ \text{tang.}\ \omega^2}$$

Quare iam erit claritas imaginis primariae.

$$= 1 + \frac{1}{13.\ 36.\ 9.\ 49.\ \text{tang.}\ \omega^2}$$

594. Quodsi iam ponamus oculum partem trigesimam claritatis qua maior vel minor est non dignoscere, patet esse

$$\tfrac{1}{30} = \frac{1}{13.\ 36.\ 9.\ 49.\ \text{tang.}\ \omega^2}$$

unde erit

$$\text{tang}\ \omega = 0,\ 03812$$
$$\omega = 0^\circ\ 13'$$

Ut adeo hoc casu, quo maxima est semidiameter obiecti adparens, apertura lentis adeo possit esse parua, ut cum in foco videtur, eius semidiameter adparens ad $\frac{1}{4}$ gr. non excurrat. Unde velut infinities minus erit claritatis augmentum, si angulus ω sumatur 10 aut 15 graduum, angulus γ vero ad paucos gradus ascendat. Simili calculo definietur augmentum, quod capit claritas imaginis primariae anterioris, quodque adeo paruum erit, ut casus, quo eius habenda esset ratio, vix detur, cum eius usus sit perexiguus.

§. 595. Ex his, quae hactenus de computanda claritate imaginis, potissimum vero, quae in capite praecedente de illuminatione primariae diximus, haud difficulter colligere licet, qua ratione calculus sit instruendus, ubi lumen per plures lentes successiue refringitur, antequam in imagine, cuius computanda est claritas, coincidit. Rem vero omnem breuissime expedire propositum est. Unde ge-

 ne-

neralia quaedam praemittemus, atque methodum, qua utendum est in casibus magis compositis, uno alteroue exemplo faciliori illustrabimus.

Fig. 55. §. 596. Sint ergo duae lentes ef, EF, earum axis communis AfFC, obiectum Aa, imago prima Bb, secunda Cc. Haec excipiatur plano albo atque computanda sit eius claritas. En iam, quae praenotasse iuuabit.

§. 597. Primo animum abstrahemus a lumine ab utraque lente reflexo, & disperso, cum post calculum institutum facile eius haberi possit ratio.

§. 598. Porro facile obuium est per supra inuenta dari claritatem imaginis Cc, simulac assumere liceat, omne lumen, quod in imaginem primam Bb incidit, incidere quoque in imaginem secundam Cc, quod quidem plurimis casibus obtinet. *Computata enim quantitate radiorum, qui in lentem obiectiuam se incidunt, quantitas ista, cum tota in* Cc *incidat, per aream imaginis* Cc *erit diuidenda.* Siue quod plane idem est, *computata claritate imaginis* Bb, *erit haec ad claritatem imaginis* Cc, *in ratione areae ipsius* Cc *ad aream ipsius* Bb. Ipse vero computus, si areas imaginum quaeras, ex principiis Dioptrices, si quantitatem radiorum vel claritatem imaginis Bb spectes, ex iis petendus est, quae in capite praecedenti demonstrauimus.

§. 599. Haud secus res erit peragenda, si plures adhibeantur lentes, simul ac euictum sit, lumen omne in obiectiuam se incidens in imagine Cc iterum collectum iri. At duplex

sae-

saepius huic hypothesi obstat impedimentum, quod vel indicasse sufficiet.

§. 600. Patet enim e puncto dato obiecti a, radios in superficiem vel aperturam lentis obiectiuae fe incidere per conum luminosum fae, idemque per conum alterum fbe iterum colligi in b, atque in eadem directione in partem posticam iterum diuergere per conum HbI, atque in plano ipsius lentis EF producto coni huius basin esse circulum IKHL. At vero cum ipsa lentis superficies tantum sit circulus EKFL. facile patet, radios e puncto a in lentem fe incidentes neque omnes incidere in lentis FE superficiem, neque in totam hanc superficiem sese diffundere. Qui enim in spatium lunulare KHLI incidunt, in imaginem Cc non pertingunt, atque contra ea e puncto b in spatium lentis itidem lunulare KELI radii incidunt plane nulli. Unde manifestum est claritatem puncti c tantum deberi radiis, qui in spatium lentiforme KFLI incidunt.

§. 601. Ductis rectis Ebi, Fbh, diametris fe, hi describantur circuli flek, ilhk, erunt isti circulis HLIK, FKEL analogi, iisque proportionales, atque radii, qui incidunt in spatium KFLI, ii sunt, qui inciderant in spatium analogum lentis obiectiuae lfkh. *Horum ergo quantitas per spatium* c *erit diuidenda, ut habeatur claritas puncti* c.

§. 602. *Si obiectum ponatur infinite remotum, quantitas ista erit ad quantitatem radiorum in totam lentis superficiem incidentium, ut area spatii* lfkh *ad*

ad aream aperturae totius l f e k, *& claritas* c *in eadem ratione imminuetur.*

§. 603. Si radii emanent e puncto A, quod in axe est, similes existent coni luminosi, at horum basis prima erit circulus flek superficiei lentis fe aequalis ipsique concentricus, basis altera erit aequalis circulo HLIK, atque lenti FE concentrica. *Quoties ergo eius area aream lentis non excedat, omnes radii e puncto* A *in lentem obiectiuam* fe *incidentes in eius imaginem* C *pertingent, huiusque adeo illuminatio erit maxima.* Idem quoque obtinebit, quoties circulus HLIK totus cadit in superficiem lentis FE.

§. 604. Contra ea si circulus HI maior fuerit superficie lentis FE, ipsique concentricus, idem erit effectus, ac si apertura lentis obiectiuae fe minuatur, usque dum euadat HI = FE. Ponamus obiectum esse Cc, erit eius imago Aa, atque cum basis ilhk sit maior superficie lentis fe, patet aperturam lentis obiectiuae FE posse esse = HLIK, atque hoc facto eandem prodire puncti A claritatem, quae prodit, integra manente apertura FE.

§. 605. Simili modo determinatur quantitas radiorum, quae in datum quoduis imaginis punctum incidit, cum plures interponuntur lentes.

Fig. 56. §. 606. Ut iam dicta exemplo illustremus, sint duae lentes FE, fe, axis communis AC, obiectum C, imago prima B, secunda A, atque huius quaerenda sit claritas centralis. Quod ut fiat, sit.

di-

diſtantia focalis lentis $FE = \varphi$.
lentis $fe = f$
diſtantia obiecti $CD = \delta$
diſtantia lentium $dD = \epsilon$

erit per principia dioptrica

$$DB = \frac{\delta\varphi}{\delta - \varphi}$$

unde

$$Bd = \frac{\epsilon(\delta - \varphi) - \delta\varphi}{\delta - \varphi}$$

$$Ad = \frac{Bd.f}{Bd - f} = \frac{f\epsilon(\delta - \varphi) - f\varphi\delta}{(\epsilon - f)(\delta - \varphi) - \delta\varphi}$$

§. 607. Sint iam radii CF, CE tales, ut per lentem FE refracti in limbum lentis ef incidant, patet, quantitatem radiorum imaginem A colluſtrantium contineri intra conum FCE. Dicatur ergo $DF = a$, $de = b$, erit

$$b : a = dB : BD = [\epsilon(\delta - \varphi) - \delta\varphi] : \delta\varphi$$

qua ergo aequatione apertura alterutrius lentis per aream alterius definitur.

§. 608. Cum vero quaeratur illuminatio centralis, concipiamus in Cc ſpatiolum infinite paruum, cuius ſemidiameter Cc ſit $= 1$, erit eius area $= \pi$, unde

area imaginis primae $Bb = \frac{\pi.DB^2}{DC^2} = \frac{\pi.\varphi^2}{(\delta - \varphi^2)}$

area imaginis ſecundae $Aa = \frac{\pi DB^2.Ad^2}{DC^2.dB^2}$

$$\text{ſiue} = \frac{\pi.\varphi^2 f^2}{[(\epsilon - f)(\delta - \varphi) - \delta\varphi]^2}$$

§. 609.

§. 609. Dicatur porro quantitas radiorum in FE incidentium $= q$, claritas imaginis Aa $= \lambda$, erit (§. 222.)

$$q = \frac{\pi\pi . FD^2}{FC^2} = \frac{\pi\pi a^2}{a^2 + \delta^2}$$

Unde ergo

$$\eta = \frac{\pi a^2 . [(\beta - f).(\delta - \varphi) - \delta\varphi]^2}{(a^2 + \delta^2)\varphi^2 f^2}$$

siue

$$\eta = \frac{\pi . a^2 . [(\beta - f - \varphi)\delta - (\beta - f)\varphi]^2}{(a^2 + \delta^2)\varphi^2 f^2}$$

§. 610. Quodsi distantia obiecti fuerit velut infinita, formula haec abit in sequentem

$$\eta = \frac{\pi a^2 (\beta - f - \varphi)^2}{\varphi^2 f^2}$$

Hanc iam duobus exemplis illustrabimus.

EXEMPLVM I.

§. 611. Sit FE lens obiectiua, fe ocularis tubi astronomici, quo in camera obscura excipiatur imago solis, atque quaerenda sit eius claritas centralis. Ponamus distantiam focalem lentis obiectiuae $= 6' = 72''$, lentis ocularis $= \frac{3}{2}''$, aperturae FD semidiametrum $= \frac{3}{2}'''$, erit

$$\varphi = 72''$$
$$f = \frac{3}{2}$$
$$a = \frac{3}{2}$$

Quodsi iam excipienda sit imago ad distantiam $2' = 24''$, erit Ad $= 24'$, unde ob

$$dB = \frac{Ad.f}{Ad - f}$$

erit

erit

$$dB = \frac{24 \cdot \frac{3}{2}}{24 - \frac{3}{2}} = \frac{8''}{5}$$

Quare ob

$$BD = \varphi = 72''$$

erit

$$dD = \delta = 72 + \frac{8}{5}$$

$$(\delta - f\varphi) = 72 + \frac{8}{5} - \frac{3}{2} - 72 = \frac{1}{10}''$$

adeoque

$$\eta = \frac{\pi . a^2 (\delta - f - \varphi)^2}{f^2 \varphi^2} = \pi . \frac{9}{4} . \frac{1}{100} . \frac{1}{72}^2 . \frac{4}{9}$$

siue

$$\eta = \frac{\pi}{518400} = 0{,}000001929 . \pi .$$

Sed illuminatio directa est $= \pi (\sin \frac{1}{4}^{\circ})^2 = 0{,}000021662 \pi$

Quare hoc casu charta, in quam radii solares directe incidunt, undecies clarior erit imagine, ope istius tubi in cameram obscuram proiectae. Claritas centralis imaginis primae Bb erit $= \pi . \text{tang FBD}^2$ §. 500. 501.) adeoque ducenties $= \pi . (\frac{1}{2})^2 : 72^2 = 0{,}0004321 . \pi$, vicies maior illuminatione directa, & ducentes maior claritate imaginis secundae aA.

EXEMPLVM II.

§. 612. Lens FE sit vere caustica atque maioris sphaerae segmentum. Radii solares in eam incidentes excipiantur lente collectiua, ut eo magis condensentur. Hoc casu lens fe & focus secundus A lenti obiectiuae propior est, quam focus primus B, ut in fig. 57.

Po-

Fig. 57. Ponamus iam esse

$$a = FD = 1'$$
$$\varphi = DB = 8$$
$$b = fd = \tfrac{1}{4}$$
$$f = 1$$

atque quaeramus lentis fe situm talem, ut omnes radios excipiat. Erit ergo

$$Bd : df = BD : DF$$

adeoque

$$Bd = \frac{df.BD}{DF} = 2'$$

unde

$$\beta = BD = 6.$$

His iam valoribus substitutis, erit

$$\eta = \frac{\pi a^2 (\beta - \varphi - f)^2}{f^2 \varphi^2} = \frac{9\pi}{64} = 0{,}140625.\pi$$

Sed claritas imaginis primae B est $= \frac{\pi}{64}$ $= 0{,}015625.\pi$

Et illuminatio directa $= \pi\,(\sin \tfrac{1}{4}{}^\circ)^2$ $= 0{,}00002166.\pi$

Illuminatio absoluta - - - - - $= \pi$.
Est ergo claritas imaginis A fere septima pars illuminationis absolutae.

§. 613. Omnes istae quantitates minuendae sunt in ea ratione, qua lumen ab utraque lente reflectitur atque dispergitur. Haec vero facile determinatur per experimentum XIX. Sit ergo decrementum istud pro lente FE $= 1 : n$, pro lente fe $1 : m$, facile patet claritatem imaginis primae B minuendam esse ut 1 ad n, & claritatem imaginis secundae A decres-

crescere in ratione composita 1:*nm*. Similique modo si plures adhibeantur lentes, atque earum impelluciditas sit *n,m,p,q,r* &c claritas ultimae imaginis decrescet in ratione composita = 1:*n m.p.q.r.* &c. Patet vero ex superioribus, has literas pro vitris mediocriter pellucidis esse fere = $\frac{6}{7}$ siue $\frac{5}{6}$, ut adeo si plures adhibeantur lentes, claritas imaginum notabiliter decrescat. At cum singula vitra peculiari sibique propria gaudeant impeluciditate, praestat rationes istas experimentis definire. Methodum vero, qua uti licet, iam supra (§. 517. seqq.) descripsimus.



PHO-

PHOTOMETRIAE
PARS III.
QVA EXPERIMENTIS ET CALCVLO PERLVSTRANTVR LVMINIS MODIFICATIONES A CORPORIBVS OPACIS PENDENTES.

CAPVT I.

De lumine a ſuperficiebus corporum opacorum politis, potiſſimum a ſpeculis reflexo, huiusque menſura & gradibus.

§. 614.

EXperientia conſtat, ſuperficies omnium corporum vel iam eſſe vel denique fieri poſſe ita politas, ut lumen plus minuſue reflectant. Sic v. gr. ſuperficies fluidorum vel ſua ſponte ad reflectendam certam luminis quantitatem apta ſunt. Vitrum, metalla, ceteraque corpora, quae igni admota liqueſcunt fuſione politam induunt ſuperficiem, quae ipſis dum iterum ab igne remota dureſcunt, eatenus manet, quatenus nullae inhaerent ſcoriae vel nulla ſuperueniat aerugo. Huc quoque referas gemmas & ſalia, quae chryſtalliſatione regularem eaque politam adipiſcuntur figuram & ſuperficiem. Eadem quoque induitur metallis,

tallis, lapidibus, lignis ceteriſque corporibus ſolidis, quum debite poliuntur.

§. 615. Ea vero corpora minus eſſe polita, quarum ſuperficies ſcatent particulis plus minuſue aſperis atque proeminentibus, in vulgus notum eſt, atque oculis microſcopio armatis ita patet, ut & eae, in quibus, cum nudus eſt nullum detegere valet aſperitatis & cruditatis veſtigium, agri ſulcati inſtar videantur inaequabiles. Unde dudum iam rerum naturalium obſeruatores ſuperficiem corporis planiſſimi eo modo planam eſſe ſtatuerunt, quo tellus ſphaerica dicitur. Utrumque enim hoc placitum a rigore geometrico abhorret.

§. 616. Etſi ergo ſuperficies abſolute plana in rerum natura vix exiſtat, eatenus tamen ad eam accedere licet, ut quae ſupereſt aſperitas ſit paruitatis contemnendae. Hoc vero perfici conſtat, cum particulae eminentes vel abraduntur, vel deprimuntur. Poſteriori modo chartam & pannos linteos & xylinos laeuigari neminem latet. Plerumque utroque opus eſt modo.

§. 617. Porro oſtendit NEWTONVS corpora opaca denſiſſima pellucida euadere ſimulac in lamellas tenuiſſimas diſtendantur, ut adeo hinc analogia quaedam inter corpora opaca & diaphana conſequi videatur. Conſtat experientia vitrum craſſius minus eſſe tranſparens, & dari terminum craſſitiei, ſub quo tranſparentia iſta vel plane euaneſcat, vel ſaltem ſenſum viſus effugiat. Ut vero terminus iſte eo eſt arctior, quo maior eſt opacitatis

gradus, ita eundem & in opaciſſimis corporibus obtinere, dubio caret. Unica haec aderit diverſitas, ut eo minor ſit lamellae lumen tranſmittentis craſſities, quo maior eſt impelluciditatis gradus. An vero detur caſus, quo craſſities iſta plane euaneſcat, experimentis haud conſtat. Aurum certe corpus omnium denſiſſimum, cum in bracteolam tenuiſſimam diſtenſum eſt, lumen tranſmittit.

§. 618. Similiter experientia conſtat, vitrum, aquam, aerem plurimaque corpora diaphana, etſi lumen fere omne tranſmittant, lumine colorato, viridi nempe & caeruleo eſſe conſpicua, quod a particulis interioribus reflectitur, atque eo denſius eſt, quo magis particulae iſtae a ſuperficie diſtant, quoque longior eſt via, quam lumen in corpore iſto percurrere debet antequam ad ſuperficiem pertingat.

§. 619. Eodem modo dantur corpora diaphana, quae lumen alio colore gaudens antrorſum reflectunt, aliud vero retrorſum tranſmittunt. Hanc eſſe indolem aquae ligno nephritico tinctae abunde conſtat.

§. 620. At mea quidem ſententia nil impedit, quo minus hinc inferamus: *Eodem modo corpora opaca omnia colorata videri, quo vitrum craſſius videtur viride, & colorem iſtum non modo ab iis proficiſci particulis, quae in ſuperficie ſunt ſitae, verum & ab iis, quae intra eam ſunt.* Sit enim AB
Fig. 58. ſuperficies corporis ABED. In hac concipiatur lamella ABba talis, ut ſi pars inferior abED abeſſet, lumen iſta tranſmitteret. Utique euidens eſt particulas lamellae ABba omnes, lumen,

men, quod in eas incidit ita reflectere, ut eius pars quaedam non modo superiora petat, verum & iterum per superficiem AB in aerem retrogrediatur. Quodsi vero iam ea sit particularum istarum indoles ut nonnisi lumen coloratum, flauum v. gr. reflectant, corpus ABED flauum videbitur, & color iste omnibus particulis, quae lamellam ABba constituunt iunctim debebitur. Quatenus enim transparens est lamella ista, eatenus lumen a cunctis istis particulis reflexum in oculos incidet.

§. 621. Cumque particulae istae lumen incidens dispergant, consequens est, *& hic obtinere angulum emanationis* (§.80.) *atque quantitatem luminis colorati oblique emanantis decrescere in ratione sinus anguli emanationis* (§. 81.) Lumen enim istud, etsi mutuatum sit, nilominus spectare licet, quasi corpori opaco proprium esset. Experimenta vero quibus veritas huius positionis a posteriori, quod aiunt, adstruitur, infra occurrent.

§. 622. Quodsi iam ea, quae hactenus disseruimus, veluti in summam contrahamus, patebit, triplicem in corporibus opacis spectandam esse luminis partitionem. Sit AB superficies corporis colorati eaque quantumlibet polita. Lumen in eam incidat secundum directionem LC, pars eius, quam primam dicemus reflectetur secundum directionem CR, ita ut angulus reflexionis RC sit angulo incidentiae aequalis. Pars altera, quae ut plurimum perexigua est, ea nobis erit, quae in superficie C a particulis heterogeneis minusque planis quaquauersum dispergitur (§ 323.

331.) Tertia denique, quae reliqua eſt, corpus ipſum ingreditur, atque a particulis, quae lamellam ABba conſtituunt ex parte reflectitur. Hoc vero lumen coloratum eſt illud, de quo iam ſermo nobis fuit (§. 620. ſeqq.)

§. 623. Partem primam, ſiue lumen omne quod ſecundum directionem CR reflectitur, quodque adeo ſuperficiei AB debetur, quatenus haec polita eſt & laeuigata, *lumen reflexum* vocabimus, atque de hoc valent cuncta ea quae in Catoptica de reflexione luminis demonſtrantur. Pars altera, quae pendet ab aſperitate ſuperficiei & a particulis heterogeneis, *lumen diſperſum* dicemus, quippe reuera in omnes partes diſpergitur. Tertia quae e lamella ABbc iterum egreditur, atque quaquauerſum emanat, corpuſque ſuo colore ſpectandum ſiſtit, *lumen emanans*, vel *coloratum* dicemus. (§ 40. 621.) His denique quartam accenſere licebit, quae lumen omne iſtud complectitur, quod in ipſo corpore diſpergitur, cuiuſque quantitas admodum eſt notabilis, plurimiſque caſibus ceteras tres partes iunctim ſumtas longe excedit. Hoc ergo lumen, cum a corpore abſorbeatur, *amiſſum* vocabimus.

§. 624. Priores tres partes ſaepiſſime confunduntur. Quodſi enim oculus ſit in recta R atque intueatur ſuperficiem C, una videbit lumen reflexum, diſperſum & coloratum. Diſperſum vero & coloratum reflexo offunditur & offuſcatur, ſimul ac ſuperficies AB fuerit admodum polita, ipſiuſque vis reflectens vehementer notabilis. Hoc caſu *ſpeculum* erit, eius ſaltem vicem ſuſtinet. Etſi vero

ro vis reflectens longe fuerit minor, lumen coloratum vero intensius, nihilominus idem obtinebit, quoties angulus RCA paucos gradus non excedit. Hocque casu lignum, marmor nigerrimum, aliaque huiuscemodi corpora, si debite poliantur, instar speculi ita lumen reflectent, ut lumen coloratum fere abesse videatur.

§. 625. Secus vero haec erunt, cum oculus non est in recta R, verum in alio quouis loco O. Hoc enim casu lumen reflexum CR ab eo plane recedit, ut adeo nonnisi lumen dispersum & coloratum videat. Utrumque enim constanter confunditur, quippe utrumque quaquauersum diffunditur.

§. 626. Alio porro modo confunditur lumen reflexum & dispersum. Quodsi enim superficies ita fuerit minus polita, ut supersint particulae eminentiores non abrasae & cauitates vel sulci non expleti, ab his lumen secundum multifarias directiones reflectetur. At vero lumini secundum directionem RC reflexi accenseri nequit, potius cum lumine quacunque demum ex caussa disperso confunditur. Eiusmodi vero particulas & cauitates eatenus heterogeneas vocare utique licebit, quatenus superficiem corporis, quae perfecte plana esse deberet, inaequabilem & asperiorem reddunt. Per se vero patet, lumen hoc, quod disperso iam adnumeratur, reflexo detrahi, ut adeo huius quantitas minuatur, dum quantitas illius augetur.

§. 627. Ut vero infiniti dantur asperitatis gradus, ita & infinitis modis lumen reflexum

dispserso miscetur. Ita v. gr. quantumuis aspera & cruda sit superficies AB, semper adhuc aderit pars quaedam luminis, quae ita reflectitur, ut secundum directionem CR ipsique proxime parallelam maiori copia pergat. Contra ea nulla dabitur superficies ita polita, quae nullum plane lumen dispergat.

§. 258. His ita praemissis iam inquiremus in quantitatem luminis reflexi, quod nempe a superficie corporis, quatenus haec laeuigata est & polita, secundum eandem directionem CR repercutitur. Vidimus vero differentiam inter corpora diaphana & opaca ad hoc reduci posse, ut crassities Cc lamellae ABba eo maior assumenda sit, quo maior est pelluciditatis gradus. Ut enim vix datur corpus ita diaphanum, quod nullum lumen dispergat, ita quoque vix dabitur eiusmodi corpus opacum, in quod nullum plane lumen ingrediatur, siue in quo crassities Cc sit $= 0$. Equidem non me fugit vitrum, chrystallos ceteraque solida diaphana, cum diffringuntur, nilominus & superficies partium diffractarum quantumuis inaequales sint, politas tamen esse, lumenque reflectere; contra ea secus haec esse, si diffringantur lapides quam plurimi opaciores & crudiores, quippe qui lumen omne dispergunt, nullumque reflectunt, nisi data opera laeuigentur, atque ad reflectendum lumen aptiora reddantur. Hoc tamen discrimen pelluciditatem lamellae ABba, quantumuis ista sit exigua, non tollit, neque lumini ingressum intra corpus denegat Insuper lamella ista eandem affectat inaequabilitatem quam

quam ipſa ſuperficies habet, cum eſt aſperior, atque a perfecta planitie plus minuſue recedit. Unde in poſteriori caſu laeuigatione ad planitiem iſtam eſt perducenda.

§. 629. Hac vero analogia inter corpora diaphana & opaca admiſſa, eodem modo lumen a corporibus opacis iisque politis reflexum computabitur, quo in ſuperioribus pro computanda quantitate eius quod a vitro reflectitur, uſi ſumus, ſiue ut rectius dicam, eadem in utroque caſu occurrit calculi difficultas, ſi hunc ex theoria luminis deducere volueris. At vero cum theoria iſta adhucdum eo uſque non ſit promota, id agemus, ut oſtendamus, formulas, quas ſupra pro definiendo lumine a vitro reflexo, inuenimus quaſque ab experimentis haud ita multum aberrare vidimus, & hic adhiberi poſſe.

§.630 Jam enim experimento VIII. (§.328.) edocti ſumus, corporis opacitatem reflexioni luminis non officere, cum eadem ſit eius quantitas a ſuperficie aquae limpidiſſimae & atramenti nigerrimi reflexa. Utramque ergo eodem abſolui calculo vel ſua ſponte patet.

§. 631. Porro viam luminis prope ſuperficiem corporis opaci curuilineam ſtatuere haud ambigo. Vires enim, quae lumen, dum in corpora diaphana incidit, refringunt, corporibus opacis denegari haud poſſe cenſeo, etſi hoc caſu lumen nimis intercipiatur, quam ut recta pergere poſſit. Exempli loco erit aqua, cum iniecto colore continuo magis inſpiſſatur. Particulae iniectae pallatim maiorem luminis refracti quantitatem intercipiunt,

 at

at illud, quod non intercipitur per eandem viam pergit, per quam incedebat, cum integra adhuc erat aquae pelluciditas. Idem & ratione vitri colorati obtinere me non monente patet. Et quamcunque demum huius rei quaeras cauſſam, eandem & in corporibus opacis lumen haud ſecus a recto tramite deflectere facile deprehendes, ſimulac diuerſam eſſe denſitatem iſtius corporis a denſitate medii ambientis aſſumas.

§. 632. Supra iam poſuimus vires refringentes viam luminis ante eius incidentiam in ſuperficiem media dirimentem incuruare, atque in eodem ſpatio FA, in quo a prima directione EF deflectitur, ſucceſſiuam contingere eius reflexionem. Quod cum ſimiliter locum habeat, ubi corpus fuerit opacum, conſequens eſt eodem ratiocinio & pro his corporibus erutum iri formulam, quam in Parte IIa pro definiendo lumine a ſuperficie vitri reflexo invenimus, quaeque adeo, quantumuis precaria ſit nilominus experimentis proxime ſatisfaciet. Dicto igitur lumine incidente $= 1$, lumen reflexum vocetur $\grave{q}$, atque pro corporibus quibuscunque, quorum ſuperficies polita eſt, lumenque reflectit, habebitur

Fig. 43.

$$-\log(1-\grave{q}) = \varkappa . \sec HFE^2 \varkappa \sec\gamma^z$$

Quodſi ergo pro dato quodam angulo HFE $=\gamma$ definiatur quantitas $\grave{q}$, dabitur quoque q pro quolibet alio angulo γ, dummodo gradus 80 non excedat.

§ 633. Si lumen normaliter incidat, erit $\gamma = 0$, $\sec\gamma = 1$. unde

$$-\log(1-\grave{q}) = \varkappa$$

Eſt

Est ergo x log. luminis residui, dum rectam FG percurrit, quodque adeo in ipsam superficiem corporis incidit.

§. 634. Ponamus iam angulum inclinationis HFE $= \gamma$ esse paucorum graduum, atque ponatur $\sec \gamma^2 = 1 + \mu$, erit

$$-\log(1 - \grave{q}) = x(1 + \mu)$$

siue ponendo $\log e = 1$.

$$1 - \grave{q} = e^{-x(1+\mu)} = e^{-x} \cdot e^{-x\mu}$$

adeoque

$$1 - \grave{q} = e^{-x}(1 - x\mu + \tfrac{1}{2}x^2\mu^2 - \tfrac{1}{2 \cdot 3}x^3\mu^3 + \&c)$$

Haec series cum vehementer conuergat, ut plurimum primus terminus sufficit, quandoque secundus quoque retinendus est. Cum enim sub angulo recto quantitas $\grave{q}$ fere semper deprehendatur $< \frac{1}{2}$, patet fore $x < \log 2$ siue $< 0{,}7$. Ponendo quoque angulum γ ultra 12 gr. non excurrere, erit $\mu < \frac{1}{20}$, quare $x\mu < \frac{1}{30}$. Fiat ergo $x\mu = \frac{1}{30}$, erit

$$1 - \grave{q} = e^{-0{,}7}(1 - \tfrac{1}{30} + \tfrac{1}{1800} - \tfrac{1}{162000} + \&c)$$

Unde tuto omittuntur termini secundum sequentes, plurimisque casibus & ipse secundus omitti poterit, nisi & in minutiis calculum prosequi necessarium ducas.

§. 635. Quodsi ergo primus tantum retineatur terminus, facilior erit computus pro lumine a speculis ustoriis reflexo, quippe in his angulus γ ad 12. gr. rarius excurrit.

§. 636. Corpora opaca lumen reflectentia in quasdam classes uniuersaliores dispescere licet. Fluida enim quorum grauitas specifica a grauitate aquae parum differt, eadem fere

gaudent vi reflectente, quae in minutiis tantum discrepabit, ab oculo vix discernendis. Porro marmor, silices, chrystalli, lapidesque quam plurimi, qui fusione facile colliquescunt atque vitrificantur ratione virium reflectentium, si debite poliantur, a vitro parum discrebabunt. Ad tertiam classem referas metalla, potissimum hydrargyrum, cuprum, orichalcum, chalybs, ferrum, stannum & quae ex his pro conficiendis speculis opticis componuntur. His longe maior est vis reflectens, quam vitro, lapidibus atque fluidis aquae analogis. Unde pro speculis conficiendis fere sola adhibentur.

§. 637. Ut iam ad specialiora deueniamus, primo assumemus dari specula, quae omne lumen reflectant, atque calculo definiemus, quantitatem reflexi. Etsi enim eiusmodi specula non dentur, in eorum tamen symptomata inquisiuisse iuuabit, cum hac ratione calculus praestruatur, qui facilior est, atque hoc absoluto vel experimentis vel calculo quoque assequi licebit, quanam ratione minuenda sit luminis reflexi quantitas, si vis reflectens minor fuerit.

Fig. 59. §. 638. Sit ergo AB speculum planum perfecte reflectens, in quod incidant radii CA, CB e puncto radiante C emanantes. Reflexi AD, BE excipiantur plano DE. Constat iam ex catoptricis, angulos reflexionis DAL, EBL esse angulis incidentiae CAK, CBK aequales, atque radios DA, EB productos coincidere in puncto F catheti incidentiae CKF.

§. 639.

§. 639. Quae cum ita se habeant, facile patet: *eandem fore plani* DE *illuminationem, si punctum radians* C, *sublato speculo, transferatur in* F, *siue in locum imaginis ipsius puncti* C. Hoc enim facto, singuli radii AC, BC transferuntur in partem auersam, AF BF, ut directe in planum DE incidant, cum antea per reflexionem inciderent.

§. 640. Similiter manente puncto radiante in C producantur radii CA, CB in G & H, fiat AG = AD, BH = BE. *Quodsi iam sublato speculo planum* DE *transferatur in* GH, *eadem iterum erit eius illuminatio.* Hoc enim si fiat, radii reflexi mutantur in directos, eodem modo eademque copia in planum GH incidentes.

§. 641. Utraque haec positio cum obtineat, quaecunqe sit puncti radiantis C planique DE ratione ipsius speculi AB positio, facile patet veras quoque eas fore, si in vicem puncti C substituatur obiectum luminosum quodcunque. Eodem enim modo speculo AB obuertitur eius imago, quo ipsum obiectum ipsi obuersum est. *Ut adeo hoc modo computus illuminationis, quae fit per radios a speculo plano reflexos ad computum illuminationis directae, quam supra* (P. I. C. II.) *fusius pertractauimus, eatenus reducatur, quatenus assumere licebit, speculum planum radios omnes, aut saltem sub quolibet angulo incidentiae aequabiliter reflectere.* Ea enim prodibit illuminatio, quae obtineret, si remoto speculo obiectum ipsum in locum imaginis substitueretur, atque posteriori casu obiecti substituti claritas in ea ratione minueretur, in qua lumen a speculo reflexum debilitatur. Hac positione in va-

variis experimentis supra descriptis (§. 59. 63. 256. 260.) usi sumus.

§. 642. Ut ergo in euolueudo hoc casu, quo specula plana esse statuuntur, breuissimis esse licuit, ita in peruestigando lumine a speculis sphaericis reflexo uberiores erimus, atque primo ea considerabimus, quae conuexa sunt, eaque iterum ponemus esse perfecte reflectentia (§. 637.) Etsi vero pluribus modis res ista ad liquidum perduci possit, sequenti potissium utemur, quo pateat, qua ratione instituendus sit computus *luminis linearis*, quoque modo ex isto deducatur luminis quantitas, cum a superficie in longum & latum extensa excipitur.

Fig. 60. & 61. §. 643. Sit ergo L punctum radians, AQNM speculum sphaericum conuexum. Ducatur LCB atque maioris perspicuitatis ergo vocetur A polus, eritque AMNQ meridianus. Sit porro AμνB alius meridianus priori infinite vicinus, Mμ pars circuli aequatori paralleli, siue cuius polus sit itidem A. Incidant iam radii ex L in partem meridiani Mm & paralleli Mμ, patet eos ob diuersam utriusque curuedinem ita reflexum iri, quasi priores emanarent e puncto R, posteriores e puncto P, ut adeo aliter diuergant, qui in meridianum incidunt, aliterque ii qui incidunt in parallelum. Puncta R, P per principia Catoptrices facile determinabuntur sequentem in modum.

§. 644. Per centrum sphaerae, C & punctum M agatur recta cMD, fiatque angulus KMD = DML, erit MK via radii reflexi, quae pro-

producatur in Q. Simili modo per m ducatur Hmq, eritque R punctum intersectionis, ex quo radii in Mm incidentes diuergunt.

§. 645. Productis porro LM, Ln in N, n, erit

$$Nn = \frac{LN.Mm}{LM}$$

$$MN = MQ$$

$$nm = mq$$

$$mq = mn = MN - Mm - Nn$$

$$Qq = MQ - mq + mM$$

unde $Qq = 2mM + Nn = \left(2 + \frac{LN}{LM}\right).Mm.$

Sed est

$$MR : RQ = Mm : Qq$$

unde

$$MR:RQ = 1:\left(2 + \frac{LN}{LM}\right)$$

$$MR:MQ = 1:\left(3 + \frac{LN}{LM}\right)$$

Sed

$$LN = \frac{LB.LA}{LM}$$

hinc

$$MR:MQ = 1:\left(3 + \frac{LB.LA}{LM^2}\right)$$

Porro est

$$MN = MQ = LN - LM$$

unde $MQ = \frac{LB.AL - LM^2}{LM}$

quare

quare tandem

$$MR = \frac{LM.(LA.LB - LM^2)}{(LA.LB + 3LM^2)}$$

§. 646. Porro demisso sinu MS, erit

$$CMP = DMK = DML$$
$$DML = MCL + MLC$$

unde

$$CMP = MCL + MLC$$
$$MPL = 2MCL + MLC$$

Est vero

$$MS = CM.\sin MCL = MP.\sin MPL$$

adeoque

$$MP = \frac{MC.\sin MCL.}{\sin(2MGL + MLC)}$$

§. 647. Dicto iam radio $CM = 1$, $CL = a$, arcu $AM = v$, habebitur

$$LM = \surd(a^2 - 2a\cos v + 1)$$
$$\sin CLM = \sin v : LM$$
$$\cos CLM = (a - \cos v) : LM$$
$$\sin MPL = \frac{a\sin 2v - \sin v}{\surd(a^2 - 2a\cos v + 1}$$
$$MP = \frac{\surd(a^2 - 2a\cos v + 1)}{2a\cos v - 1}$$
$$MR = \frac{(a\cos v - 1).\surd(a^2 - 2a\cos v + 1)}{2a^2 - 3a\cos v + 1.}$$

§. 648. Si punctum radians L fuerit infinite remotum, erit $a = \infty$, unde brevissime fiet

$$MP = CP = \tfrac{1}{2}\sec v$$
$$MR = \tfrac{1}{2}\cos v$$

adeoque

$$MP.MR = \tfrac{1}{4}.$$

§. 649.

§. 649. Lumen quod in meridiani elementum Mm incidit ita reflectitur, ac si emanaret e puncto R. Ad rectas mp, mL agantur normales vel arculi Mh, Mg, triangula Mmh, Mmg ob communem hypothenusam & legem reflexionis erunt aequalia & similia, adeoque Mh = Mg. Quare densita in Mh & Mg erit eadem, dicatur ergo = D. Sit porro planum HK, IK ad directionem radiorum normale, atque densitas luminis in HK ponatur = δ, erit

$$D:\delta = \mathrm{RK}:\mathrm{RH}$$

$$\delta = \frac{D.\mathrm{RH}}{\mathrm{RK}}$$

Quae ergo est densitas luminis linearis in HK, quod a meridiani elemento Mm reflectitur.

§ 650. Ut vero & ea quaeratur, quae debetur elemento paralleli Mμ, quae sit = d, recordandum, lumen ita reflecti, quasi emanaret e puncto axis P. Dicta ergo iterum densitate eius, quod in Mμ incidit = D, patet fore

$$D:d = \mathrm{PK}:\mathrm{PM}$$

adeoque

$$d = \frac{\mathrm{PM}.D}{\mathrm{PK}}$$

Quare componendo habetur vera illuminatio

$$\eta = d\delta = \frac{\mathrm{PM}\ \mathrm{RM}.D^2}{\mathrm{PK}.\mathrm{RK}}$$

siue substitutis valoribus ante repertis

$$\eta = \delta d = \frac{((a^3+3a)\cos v\ a^2(1+2\cos v^2)-1)-D^2}{((4a^3+5a)\cos v-a^2(2+6\cos v^2)-1)\mathrm{PK}.\mathrm{RK}}$$

§. 651.

§. 651. Sed densitas D^2 est variabilis, cum pendeat a distantia LM, quare dicta densitate in C $= \Delta$, erit

$$D^2 = 1 : LM^2 = \frac{aa.\Delta}{a^2 - 2a\cos v + 1}$$

Quare

$$n = d\delta = \frac{(a^3\cos v + 3a\cos v - a^2 - 2a^2\cos v^2 - 1)}{(4a^3 y - 2a^2 - 6a^2\cos v + 5a\cos v - 1)} \cdot \frac{a^2\Delta}{(a - \cos v)^2 . PK.RK}$$

§. 652. Prolixae hae formulae mirum in modum contrahuntur, si distantia puncti radiantis L ponatur velut infinita. Erit enim hoc casu $a = \infty$, unde

$$n = d\delta = \frac{\Delta}{4.PK.RK}$$

Cumque hoc casu sit

$$MR = \tfrac{1}{2}\cos v.$$
$$PM = \tfrac{1}{2}\sec v$$

erit

$$PK.RK - (MK + \tfrac{1}{2}\sec v).(MK + \tfrac{1}{2}\cos v)$$

adeoque

$$n = \delta d = \frac{\Delta}{4MK^2 + 2MK(\sec v + \cos v) + 1}$$

§. 653. Quodsi insuper planum KH ratione ipsius diametri AB, assumi possit ceu infinite remotum, quod facere licebit, simulac AB respectu distantiae MK fuerit velut infinite parva, erit hoc casu

$$PK = RK$$

adeo-

adeoque illuminatio plani KH decrescet in ratione reciproca duplicata distantiae, atque ab angulis incidentiae siue arcu AM fere erit independens, cum ultima formula abeat in sequentem

$$\eta = d\delta = \frac{\Delta}{PK^2}$$

§. 654. Plane vero illuminatio ab arcu AM libera erit, quoties sec v fuerit velut infinite parua ratione distantiae MK. *Quo ergo casu sphaera AQN erit instar puncti radiantis, atque illuminatio, quae inde prouenit, reciproce erit ut quadratum distantiae*

§. 655. Ceteris casibus, quibus angulus v adeo parum a recto differt, ut sec v euadat fere infinita, adeoque ad distantiam plani MK utcunque magnam, notabilem habeat rationem, secundus terminus denominatoris fractionis

$$\eta = \frac{\Delta}{4MK^2 + 2MK(\sec v + \cos v) + 1}$$

abiicit nequit, sed erit

$$\eta = \frac{\Delta}{4MK^2 + 2MK \sec v}$$

& si hoc casu, quo angulus v a recto vix differt, distantia MK fuerit valde parua, & secante ipsius v velut infinite minor, fiet

$$\eta = \Delta : 2MK \sec v.$$

§. 656. Ceterum vel per se patet, Δ esse illuminationem directam plani in C, si puncto radianti L directe obuertatur, similiterque claritatem planam η haberi si claritas vel densitas radiorum linearis in KH per eam quae est in Mμ multiplicetur, ut sit

$$\eta = d\delta.$$

§. 657. Eundem hunc casum pro lumine
Fig62. L infinite remoto iam sequentem in modum peruestigabimus. Sit LDKC speculum sphaericum perfecte reflectens in hoc incidat lumen secundum directionem LK, ut LK sit axis, L vertex, CED horizon. Planum circuli sphaerae maximi AEB concipiatur infinite extensum, atque ad directionem luminis utcunque inclinatum, atque quaerenda iam sit quantitas radiorum a speculo in hoc planum reflexorum.

§. 658. Per se vero patet radios extremos, qui in planum hoc incidunt ipsi plano esse parallelos. Ponamus ergo radios istos eos esse, qui secundum directionem cunctis communem LK incidunt in curuam GHNF in ipsa sphaerae superficie construendam. Sit arcus DB plani AEB supra horizontem CED eleuatio. E vertice L demissus concipiatur verticalis quicunque LNMK, atque haud difficulter demonstrabitur esse debere LN=NM. Ducta enim recta QM e centro sphaerae Q per punctum aequatoris M, euidens est, radium secundum directionem ipsi LQ parallelam in N incidentem reflecti debere secundum directionem rectae QM parallelam, quippe eum inter extremos referimus. Hoc vero ut fiat, debet esse LN=NM.

§. 659. Quodsi ergo in singulis verticalibus bifariam secentur distantiae LB, LM, LC punctorum aequatoris B, M, C a vertice L, haud difficulter construetur curua GHF.

§. 660. Concipiantur iam duo plana infinite extensa RST, VWX plano aequatoris AEB

AEB parallela facile patet omnes radios in hemisphaerium LCED incidentes ita diuidi, ut qui incidunt in spatium LGHF reflectantur in planum superius RT, ceterique, qui incidunt in partem residuam GHFDC cadant in planum inferius VWX.

§. 661. Porro si e singulis punctis curuae GHF in planum horizontis CED demittantur perpendiculares, hae in isto plano abscindent curuam, cuius adplicatae e centro Q computatae erunt sinus arcuum LF, LN, LG, atque huius curuae area quantitati radiorum sursum reflexorum erit proportionalis. Quae omnia vel inde patent, quod directio cunctorum radiorum posita sit ipsi LK parallela, siue ad planum horizontis normalis. Simili modo dabitur quantitas radiorum in triangulum quodlibet LFN incidentium per aream huius trianguli in planum horizontis proiecti.

§. 662. Circulo verticali LNK ductus sit infinite vicinus Lnmk, atque fiat quantitas radiorum in elementum NLn incidentium $a\lambda$, sitque

arcus $LF = \frac{1}{2}LB = \omega$
arcus $LN = \frac{1}{2}LM = v$
angulus $BLM = PD = \xi$
semidiameter sphaerae $LQ = 1$.

erit area elementi NLn in planum horizontis proiecti $= \frac{1}{2}\sin v^2 . d\xi$, adeoque

$$d\lambda = \tfrac{1}{2}\sin v^2 d\xi$$

unde fit

$$4d\lambda = (1 - \cos 2v)\, d\xi$$

§. 663. Eſt vero $(1-\cos 2v)d\xi = (1-\cos LM)d\xi$ area elementi ſphaerici MLm, quare erit

$$4d\lambda = MLm$$

& integrando

$$\lambda = \tfrac{1}{4}MLB.$$

Creſcente ergo angulo BLM, *creſcet quantitas radiorum in triangulum curuilineum* FLN *incidentium ut area trianguli reſpondentis circuliſque ſphaerae maximis terminati* BLM, *cum quartae parti huius ſuperficiei ſit aequalis*

§. 664. Pro toto ſpatio LFG triangulum BLM abit in ſuperficiem hemiſphaerii, *eritque ergo quantitas radiorum in totum planum ſuperius reflexorum* $= \tfrac{1}{2}\pi$.

§. 665. Sed quantitas radiorum in ſphaeram incidentium aequalis eſt areae circuli maximi, quare cum ſit $=\pi$, coſequens eſt; *quantitatem radiorum in planum inferius reflexorum quoque eſſe* $= \tfrac{1}{2}\pi$.

§. 666. Utraque ergo haec quantitas non modo eſt eadem, verum &, quod notabile videtur, a ſitu planorum RT, VX non pendet. *Utcunque ergo mutetur huius poſitio, eadem ſemper radiorum quantitas in iſtud reflectetur, dimidia nempe pars eorum, qui in totum ſpeculum* DKGL *incidunt.*

§. 667. Quodſi ergo in vicem utriusque plani ſubſtituamus ſphaeram infinitam ſpeculo DKGL concentricam, *utcunque haec ſphaera bifariam ſecetur plano per centrum* Q *tranſeunte, quantitas radiorum a ſpeculo in alterutrum hemiſphaerium reflexorum erit conſtans, dimidia nempe quantitas eorum, qui in ſpeculum incidunt.*

§. 668.

§. 668. Unde porro prono fluit alueo, *quoduis partem superficiei huius sphaerae aeque esse a speculo isto illuminatam.*

§. 669. Quodsi sphaera ista speculo circumscripta haud fuerit infinita, positiones hae erunt immutandae. Sit enim speculum DKAL, huic circumscripta concipiatur sphaera concentrica MNS. Radii in speculum incidant secundum directionem parallelam axi sQS. Plano PQO sphaera sit bisecta, atque bisectis pariter arcubus AL, BF in G, F, patet radios secundum directionem gG, fF in puncta G, F incidentes reflecti secundum rectas GM, FN, sectioni PQO parallelas (§. 658.) Cum iam per ea, quae ante demonstrauimus, quantitas radiorum in spatium speculi GHF incidentium sit $= \frac{1}{4}\pi$, adeoque dimidia pars eorum, qui in totum speculum incidunt, patet quantitatem istam reflecti in segmentum sphaerae MsNHM hemisphaerio PsOP minus, ut adeo quantitas radiorum in hoc hemisphaerium reflexorum maior sit ea, quae in hemisphaerium inferius reflectitur. Nec mirum. Ductis enim rectis rCR, tCT axi sQS parallelis, manifestum est, in segmentum sphaerae RST radios incidere plane nullos, cum totum ab ipso speculo obumbretur. Quare cum omnes reflectantur in segmentum sphaerae RPsOT, facile patescit segmentum MsNHM hemisphaerio minus esse debere, etiamsi in toto ipsius spatio aequaliter disseminarentur. Cum vero maiori copia sursum reflectantur consequens est segmentum MHNOP segmento RST maius esse. Fig. 63.

§. 670. Ceterum si utrumque hoc segmentum ad totam sphaerae superficiem referatur, facile elucescit, contemnendae utrumque fore paruitatis, quoties diameter OP diametro speculi CD vel centies maior fuerit. Unde adeo his casibus proxime ad verum accedent positiones, quas in praecedentibus pro sphaera infinita eruimus.

§. 671. Ponamus v. gr. lunam esse speculum sphaericum perfecte reflectens, sitque eius semidiametur $= 1$ CQ. semidiameter orbis lunaris QS $=$ sec 16′ $= 215$. erit eius superficies $= 184900\pi$. Quantitas radiorum solarium in lunae superficiem incidentium est $= \pi$, eadem ergo cum per totam istam superficiem fere aequaliter dissemine-tur, patet eius densitatem minui in ratione $184900\pi : \pi = 184900 : 1$ Quodsi per formulas supra traditas quaeramus claritatem sphaere in s, quippe quae maxima est, erit $v = 0$, μ

Fig. 60. $= \infty$, unde (§. 648.)

$$MP = MR = \tfrac{1}{2} = CP$$

$$RK = PK = 215 - \tfrac{1}{2} = 214\tfrac{1}{2}$$

Quare ob (§652.)

$$\lambda = \frac{\Delta}{4\, IK.RK}$$

erit

$$\lambda = \Delta : 4(214\tfrac{1}{2})^2$$

At ex calculo rudiori habuimus.

$$\lambda = \Delta : 4(215)^2$$

Quare differentia vix est $\frac{1}{215}$. (§.670.)

§. 672. In perlustrandis speculis concauis siue ustoriis breuioribus esse licebit, quippe cla-

claritatem imaginis in foco haud secus calculo assequi dabitur, ac supra eandem pro lentibus causticis inuenimus. Sit ergo speculum concauum idemque perfecte reflectens ACB, axis GC, obiectum circulare gGγ, huius imago φFf. Qantitas radiorum, quos obiectum gγ in speculum AB diffundit $=q$, claritas media imaginis hinc nascens $=\eta$, diameter sphaerae $= 4a$, distantia obiecti GC$=\delta$, erit per principia Catoptrices Fig 64.

$$CF = \frac{a\delta}{\delta - a}$$

§. 673. Ponendo AC = CB, ducantur gA, gB, factaque gK=gA, bifariam secetur KB in P, vi definitionis supra traditae (§. 495.) erunt gA, gB latera coni extremi, & gP semisumma siue medium arithmeticum, atque proinde (§. 222.)

$$q = \frac{\pi\pi . AD^2 . Gg^2}{gP^2}$$

Porro ob

erit $\eta = q : \pi (Ff)^2$

$$\eta = \frac{\pi . AD^2 . Gg^2}{Ff^2 . gP^2}$$

Quae ergo est claritas media imaginis, quae quaerebatur.

§ 674. Quodsi AC non fuerit plurium graduum, ponere licebit DC=o, AD=AC, quo facto erit proxime

$$\eta = \frac{\pi . AC^2 . Gg^2}{Ff^2 . gP^2}$$

Cumque ſit

$$Gg:Ff = CG:CF$$

erit

$$\eta = \frac{\pi . AC^2 . GC^2}{CF^2 . gP^2}$$

675. Fiat ut ſupra (§. 499.)

$$GC:gP = \cos.\omega$$

erit

$$\eta = \pi . \text{tang}\, AFC^2 : \sec\omega^2$$

Ex his vero formulis eadem deducentur theoremata, iiſdemque fere verbis expreſſa, quae ſupra ex ſimilibus aequationibus pro lentibus cauſticis eruimus (§. 400. ſeqq.) Quare iis hic repetendis ſuperſedere licebit.

§. 676. Quodſi imago ϕf excipiatur charta vel alio obiecto, hoc ipſo fiet ut pars radiorum, qui in ſpeculum incidere debuiſſent, intercipiatur, quare iam minuetur imaginis claritas. Sit ſemidiameter chartae ϕf, intercipientur radii, quos obiectum per infinitos conos coincidentes in ſpatium $\pi\ \phi F^2$ diffundit: Horum ergo quantitas dicatur $\grave{q}$, atque ducta gf, erit (§. 222.)

$$\grave{q} = \frac{\pi . \pi . gG^2 . \phi F^2}{\left(\frac{g\phi + gf}{2}\right)^2}$$

Unde quantitas radiorum in ſpeculum incidentium iam erit

$$q - \grave{q} = \frac{\pi\pi . AC^2 . gG^2}{gP^2} - \frac{\pi\pi . gG^2 . \phi F^2}{((g\phi + gf):2)^2}$$

Facile ergo hinc dabitur claritatis decrementum, quod capit imago ab interpoſita charta vel

vel obiecto f ϕ. Simili modo decrementum iſtud definietur, ſi ſpeculum ſumatur, quod in centro C perforatum eſt, qualia ad conficiendos tubos catadioptricos, ſimiliaque microſcopia adhibentur.

§. 677. Hactenus dicta obtinent, ubi ſpecula ponuntur eſſe perfecte reflectentia. Cum vero huiuſcemodi vix dentur, diſpiciendum eſt, qua ratione determinandum ſit claritatis decrementum, quod minori vi reflectenti debetur. Experimentis rem iſtam expedire ſi ſpecula vel corpora laeuigata plana fuerint, haud erit difficile. Quare methodum, qua uti licet, deſcribam, unoque alteroque exemplo illuſtrabo, quo facto eam infinitis qui dari poſſunt caſibus ſpecialioribus adplicare poterit, quicunque vim reflectentem, quae cuicunque corpori polito propria eſt, definire, eamque uno velut obtutu in tabella exhibere geſtit. Adparatum, quo ad polienda omnis generis ligna, lapides, metalla cet. tempuſque, quod in hiſce poliendis ſinguliſque experimentis haud ſemel inſtaurandis, terendum eſſet, mihi deeſſe, vel indicaſſe ſufficiat.

EXPERIMENTVM XXIV.

§. 678. Collocata in L candela, quae radios normaliter proiiceret in murum albiſſimum A, in C poſui obiectum opacum, quod partem muri B obumbraret. Quo facto in M, N, P, Q collocaui quatuor ſpecula vitrea hydrargyro obducta, quae lumen candelae in idem muri ſpatium B reflecterent. Hac ſervata conditione ſpeculorum diſtantiam ten- Fig. 65.

tando quaeſiui eam, qua ſpatium B a cunctis illuminatum, eadem gauderet claritate, qua altera pars muri A a candela directe collustrata. Dedi vero operam, ut lumen & in ſpecula & in B incideret ſub angulo fere recto, atque ipſa candelae flamma quam maxime eſſet conica (§. 312.) Hoc peracto dimenſus ſum diſtantias ſpeculorum a candela & a parte muri B, ſimiliterque ipſam candelae a muro A diſtantiam, inuenique fuiſſe in digitis & lineis pedis pariſini

	''	'''
AL =	81,	11.
BM =	95,	4.
LM =	26,	2.
BN	97,	10.
LN	23,	8.
BP =	98,	7.
LP =	21,	8.
BQ	97,	11.
LQ =	18,	5.

§. 679. Huic experimento iam ita calculum adcommodaui. Sint imagines candelae m, n, p, q, patet ex ſuperioribus, has totidem candelarum ſuſtinere vices, atque per principia Catoptrices eſſe Mm = ML, Nn = NL, Pp PL, Qq QL. Quodſi iam ſpecula M, N, P, Q eſſent perfecte reflectentia, idem foret effectus, ſi in vicem imaginum m, n, p, q ſubſtituerentur quatuor candelae, ipſi L & magnitudine & claritate aequales, cumque illuminatio cuilibet debita ſit reciproce ut quadratum

dratum distantiae (§. 48.) consequens est, hoc casu esse debere

$$\frac{1}{LA^2} = \frac{1}{Bm^2} + \frac{1}{Bn^2} + \frac{1}{Bp^2} + \frac{1}{Bq^2}$$

At distantiae, quas suppeditat experimentum minores sunt, quam ut huic aequationi satisfacerent. Est enim

$$AL = 983'''.$$
$$Bm = 1458.$$
$$Bn = 1458.$$
$$Bp = 1443.$$
$$Bq = 1396.$$

Quare ob

$$1 = \left(\frac{LA}{Bm}\right)^2 + \left(\frac{LA}{Bn}\right)^2 + \left(\frac{LA}{Bp}\right)^2 + \left(\frac{LA}{Bq}\right)^2$$

erit

$$(LA:Bm)^2 = 0{,}4546$$
$$(LA:Bn)^2 = 0{,}4546$$
$$(LA:Bp)^2 = 0{,}4641$$
$$(LA:Bq)^2 = 0{,}4958$$

Unde summa - - $= 1{,}8691$
Quae deberet esse $= 1{,}0000$

Minuendum ergo est lumen 1,8691 a speculis reflexum, in ratione 1,8691 ad 1,0000, ut aequale euadat lumini directo in A, quod est $= 1{,}0000$. Est vero $1{,}8691 : 1{,}0000 = 1 : 0{,}5352$. Hinc ergo patet dicto lumine in speculum incidente $= 1$, nequaquam omne istud reflecti, sed quantitatem reflexi tantum fore 0,5352, ut adeo a speculo absorbeatur pars $= 0{,}4648$. Quantitas ergo reflexi vix est dimidia pars incidentis.

§ 680.

§. 680. Patet ergo, si duo tantum sumta fuissent specula, candelae ista proxime admovenda fuissent, quo claritas in B euaderet claritati directae in A aequalis. At ea a candela magis esse remouenda, vel inde elucescit, quod praestat, spatium illuminatum B minus esse, atque angulos incidentiae luminis in specula a recto parum discrepare. Hoc vero ipso augendum esse speculorum numerum, vel me tacente quilibet intelligit.

§. 681. Eodem modo, quem iam exemplo illustrauimus vim reflectentem corporum laevigatorum & planorum ad examen reuocare licet. Monere tamen hic conuenit, dari casus, quibus cum lumine reflexo miscetur lumen coloratum (§. 623. 624.) quod cum ab eo separari non possit, seorsim determinandum erit, siquidem eius rationem habere volueris.

§. 682. Experimentum iamiam descriptum insuper peculiare quid habet, quod a plurimis aliis abest. Cum enim specula ista, quibus usus sum, vitrea sint, hydrargyro obducta, duplex hic adest reflexio, duplicique ratione lumen amittitur. Ut igitur definirem, quid hydrargyro soli debeatur, calculum ita instruxi.

Fig. 34. §. 683. Sit BO superficies vitri anterior lumini exposita, CN posterior eaque mercurio obducta, atque ponatur

	in B	C	D
lumen incidens	1	1	1
reflexum - -	q	π	p
transmissum -	n	μ	m

debili-

debilitetur lumen rectam BC = DC = DE &c. percurrens ut 1 ad λ, sitque denique quantitas luminis omnis, quod antrorsum reflectitur $= M$, quod hydrargyrum ingreditur & ab isto absorbetur $= N$, eodem modo, quo supra (§. 342. 357. 578.) colligitur esse

$$M = q + nm\varpi\lambda^2 + nm\varpi^2 p\lambda^4 + nm\varpi^3 p^2\lambda^6 + \&c.$$

$$N = n\lambda\mu + n\lambda^3\varpi p\mu + n\lambda^5\varpi^2 p^2\mu + \&c.$$

unde

$$M = q + \frac{nm\varpi\lambda^2}{1 \quad \varpi p\lambda^2}$$

$$N = \frac{n\lambda\mu}{1 - \varpi p\lambda^2}$$

Quare

$$\varpi = \frac{M - q}{(Mp + nm - qp)\lambda\lambda}$$

§. 684. Est vero sub angulo recto (§. 443.)

$$q = 0{,}02 \qquad p = 0{,}0445$$
$$n = 0{,}98 \qquad m = 0{,}9555$$

Et in experimento nostro $M = 0{,}5352$. Quare erit

$$\varpi = \frac{0{,}5370}{\lambda\lambda}$$

§. 685. Pendet vero λ ab impelluciditate vitri, quam experimentis explorare nolui, cum hydrargyrum a speculis fuisset abradendum. His vero ob alia experimenta parcere consultius esse duxi. Quodsi tamen ponamus esse $\lambda\lambda = 0{,}9$, erit

$$\varpi = 0{,}5967.$$

§. 686. Quod obtineret si specula essent admodum pellucida. Contra ea si vitrum,

quo

quo constant, tabulis istis vitreis quas in experimentis antecedentibus adhibui, aequale fuisse assumamus, quod maxime ad verum accedere autumo, habebimus (§. 472.)

$$q = \tfrac{13}{2}c, \text{ unde } \lambda = \tfrac{6}{7}$$

adeoque

$$\varpi = 0{,}7160.$$

§. 687. Medium vero sumendo, numero rotundiore sumemus

$$\varpi = \tfrac{2}{3}$$

Ut adeo pars luminis, quae ab hydrargyro absorbetur, proxime sit $\frac{2}{3}$ eius, quod sub angulo recto incidit.

§. 688. Hac ergo ratione ceu vera admissa, facile dabitur lumen sub quolibet angulo incidentiae reflexum. Est enim in genere (§. 632.)

$$-\log(1-q') = \varkappa \sec\gamma^2 = -\log(1-\varpi)$$

At vero pro angulo $\gamma = 0$, est $1 - q' = \frac{1}{3}$, unde sumendo logarithmos Briggianos, habetur

$$\varkappa = -\log\tfrac{1}{3} = \log 3 = 0{,}4771212.$$

adeoque

$$-\log(1-q') = 0{,}4771212.\sec\gamma^2 = -\log(1-\varpi)$$

§. 689. Ita v. gr. sub angulo γ semirecto est $\sec\gamma^2 = 2$, adeoque

$$-\log(1-q') = 0.9542424$$
$$1 - q' = \tfrac{1}{9}$$
$$q' = \tfrac{8}{9} = \varpi$$

Ut adeo sub angulo incidentiae semirecto nona tantum pars luminis incidentis absorbeatur.

§. 690.

§. 690. Sub angulo $\gamma=60°$, est sec $\gamma^2=4$, adeoque reperietur

$$-\log(1-q)=1.9084848$$
$$1-q=\tfrac{1}{38}$$
$$q=\tfrac{25}{38}=\varpi$$

quare sub angulo incidentiae 30 gr. tantum $\tfrac{1}{38}$ luminis incidentis absorbetur.

§. 691. Probe tamen notandum est, haec ad verum tunc tantum accedere, cum lumen e vitro in superficiem hydrargyri incidit. Quodsi vero incidat ex aere, mea quidem sententia quantitas luminis reflexi augetur §. 327. seqq.)

§. 692. Detur iam speculum causticum vitreum mercurio obductum, facile patet dimidiam tantum partem radiorum qui in istud incidunt, ab eo reflecti, (§. 679), ut adeo claritas imaginis duplo minor sit ea, quae obtineret, si speculum esset perfecte reflectens. (§. 635.)

§. 693. Quodsi iam quaeratur quantitas luminis a speculo vitreo sub quolibet angulo inclinationis γ reflexo, fieri id poterit ope utriusque formulae ante erutae

$$M=q+\frac{nm\varpi\lambda^2}{1-\varpi p\lambda^2}$$

$$-\log(1-\varpi)=0,4771212.\ \text{sec}\gamma^2$$

simulac detur valor ipsius λ ab impelluciditate vitri pendens. Etenim quantitates q,n,p,m dabuntur per utramque tabellam (§. 442. 443) siue per formulas (§. 438.) & quantitas ϖ per angulum γ ope aequationis posterioris.

§. 694. Posita v. gr. $\lambda\lambda=\tfrac{5}{6}$, quaeramus lumen sub angulo incidentiae 30° a speculo

re-

reflexum. Sit ergo BF eius superficies anterior, CG posterior mercurio obducta. Lumen secundum AB incidat in B,
Fig. 66.
erit ang. ABM $= 30°$, unde ABK $= 60°$, adeoque ob

$$\sin ABK : \sin CBP = 3:2$$

erit

$$CBP = \tfrac{2}{3} \sin ABK = \tfrac{2}{3}\sqrt{\tfrac{3}{4}}$$

Quare

$$\sec\gamma^2 = \sec CBP^2 = 1,5$$

hinc

$$-\log(1-\varpi) = 0,4771212 \sec\gamma^2 = 0,7156818$$

adeoque

$$1-\varpi = 0,1925.$$

$$\varpi = 0,8075.$$

Erit ergo ϖ proxime $= \frac{4}{5}$.

§. 695. Porro ob KBA $= 60°$, habebitur (§. 443.)

$$q = 0,0772 \qquad n = 0,9228$$

$$p = 0,1653 \qquad m = 0,8347.$$

Unde erit

$$nm\varpi\lambda^2 = 0,5135$$

$$1 - p\lambda^2\varpi = 0,8943$$

adeoque

$$M = q + \frac{nm\varpi\lambda^2}{1-\varpi p\lambda^2} = 0,6514.$$

Quare lumen a speculo vitreo mediocriter pellucido sub angulo incidentiae 60 gr. reflexo fere est $\frac{2}{3}$ incidentis.

CA-

CAPVT II.

Experimentis inter se conferuntur claritas luminis siue obiecti illuminantis, & claritas corporis opaci, quod ab eo collustratur, cuiusque superficies asperior est minusque polita.

§. 696. Quadruplici modo lumen in superficies corporum opacorum incidens, ab iis diuidi atque calculo prosequendum esse, iam initio capitis praecedentis vidimus (§. 622. 623.) eiusque partem eam, quam κατ' ἐξοχὴν reflexam vocauimus, ita dedimus euolutam, ut nec materies desit iis, quibus eam pro singulis, quae dari possunt, corporibus experimentis definiendi animus erit & otium. Ad reliquas tres partes, quas fere intactas reliquimus, iam regrediamur, atque dispiciamus, qua ratione lumen a corporibus opacis dispersum, coloratum & amissum determinandum sit.

§. 697. Cum superficies omnium corporum ita laeuigari possint, ut sublata asperitate, nitidiora euadant lumenque saltem ex parte reflectant, consequens est, lumen reflexum nunquam prorsus ab iis abesse, verummodo cum lumine colorato & disperso ita misceri, ut una cum eo quaquauersum a corpore repercutiatur. (§. 626.) Euidens quoque est, hoc obtinere, simul ac corporis superficies ita exasperetur, ut omnis nitor plane tollatur, minimaequae particulae, quae in superficie sunt, lumen sub omnibus angulis inciden-

 ciden-

cidentiae quaquauersum reflectant. Hanc vero esse indolem corporum omni nitore destitutorum, experientia facile constat. Quodsi enim eiusmodi superficies subiiciatur microscopio instar montium & vallium eam scabrosam & inaequabilem esse vel primo intuitu videre licet.

§. 698. Ut porro maxime irregularis est ista scabrities, ita vix dabitur anomalias istas ad legem quandam reuocare, qua stabilita instrui possit luminis quaquauersum reflexi calculus. Etsi enim cum cel. KAESTNERO iure meritoque spectari possint instar minutissimorum speculorum, quoslibet situs aeque adfectantium, concedenda tamen sunt insterstitiola quae lumen in interiores corporis partes transiturum libere permeare possit. Similique modo speculorum istorum alia ab aliis obumbrari, ob omnimodam eorum positionem necessario statuendum est. Porro cum omnes, qui dari possunt, eorum situs simul obtineant lumen sub angulis quibuscunque in ista simul incidit. Hinc vero vel maxima nascitur luminis reflexi diuersitas, quae non potest non calculum reddere intricatissimum.

§. 699. Quae cum ita se habeant, satius esse duxi, rem istam omnem experimentis euclutam sistere, etsi hac ratione lumen quacunque demum ex caussa dispersum totum quantum est computum ingrediatur, neque constet liquido, quota eius pars cuique istarum caussarum debeatur. Unum hoc praemonendum est, me in istis experimentis spectare

ctare corpora ceu minime laeuigata atque & in minutissimus particulis velut absolute scabrosa & impolita, quo ipso statuere certe licet, lumen omne incidens perfecte dispergi, neque a particulis, quae remanere possent, nitidioribus ita reflecti, ut lumini colorato ab interioribus corporis particulis repercussio ne minimum officiat.

EXPERIMENTVM XXV.

§. 700. Duabus chartis AB, AC mensae impositis, quae in A angulum claudebant quemcunque, duobus tamen rectis notabiliter minorem, in L collocaui candelam, quae ab utraque charta aeque distaret, atque triangula ABL, ACL redderet aequalia, adeoque & puncta in utraque charta ab A aequidistantia aeque illuminaret. Quo facto a candela utcunque recessi obliquius, atque in DE ipsi obuerti lentem conuexam, chartaeque utriusque imaginem excepi in foco fφ. Vidi uero, imagine puncti A cadente in F puncta ab F utrinque aeque dissita aeque quoque esse illuminata. Idemque deprehendi, situm lentis ita immutando, ut angulus LAF tum maior tum & minor euaderet. Fig. 67

§. 701. Aucto angulo LAF augebantur anguli emanationis FAB, minuebantur anguli FAC, sub quibus lumen e charta AC emanabat in superficiem lentis DE. At cum nilominus utriusque chartae imago Fφ, Ff aeque clara esset, patet hanc claritatem ab angulo emanationis non pendere, nisi, quod ex superioribus constat, data opera ratio inter

distantias bG, AG, cG admodum fiat notabilis. At cum hoc ipso confusae euadant imaginis partes, hinc vel sua sponte elucescit, huiuscemodi casus vitandos esse.

Fig. 68. §. 702. Sit ergo lens AB, huius axis FCG, in Gg & Gγ concipiantur duo plana vel infinite parua vel infinite remota, quo anguli gCG, GCγ euadant minimi. Horum prius Gg axi normaliter instat, posterius Gγ ad eum sub angulo quocunque sit inclinatum, utrumque vero aeque clarum. E puncto γ agatur normalis ad axin γP, sitque Gg = Gγ. Excepta iam utriusque plani imagine in φFf, ductisque rectis gCf, γCφ patet fore

$$\varphi F : P\gamma = Ff : Gg.$$

At vero cum utraque imago sit aeque clara, eademque pro utraque sit lentis apertura & distantia, consequens est, quantitatem radiorum in lentem incidentium esse ut φF ad Ff adeoque ut Pγ ad Gg. Quodsi ergo in vicem lentis substituatur charta aequalis, euidens est, huius chartae illuminationem utrique plano Gg, Gγ debitam esse in ratione gG ad γP. Spectetur Gg = Gγ ceu sinus totus, erit γP sinus anguli emanationis. *Quare illuminatio directa decrescet ut sinus anguli, sub quo lumen emanat.* En ergo positionem, quam supra curatius demonstratam dare promisimus (§. 74. seqq.)

§. 703. Eandem deprehendes utriusque imaginis Ff, Fφ claritatem, si plana sumantur pigmento quocunque sed eodem & aeque ilita, omnique nitore, quantum eius fieri potest, destituta. Ex cunctis enim lumen ita ema-

emanat, ut eius quantitas minuatur in ratione sinus anguli emanationis. Quodsi ergo eiusmodi corpora a lumine quocunque collustrentur, eiusque porro vicem sustineant, facile & hinc iterum patet, omnia de eo valere quae de lumine, quod corporibus luminosis proprium est, in antecedentibus demonstravimus. Palmariam vero hanc positionem iam inter principia quae cuique facile sese probant, a nobis relatam esse videbis (§.40.)

§. 704. Inter corpora mutuato lumine visibilia, eminent *alba*. Haec vero ea esse, quae lumen, quod in eorum superficiem incidit, tantum non omne reflectunt, vel maxime euictum est. Similiter experimentis, quae hic describere, cum ubique ea descripta inuenias, superfluum foret, lumen album prismatis ope ita diuidi, ut radii colorati, qui iunctim albedinem constituunt, charta excepti, singuli seorsim spectabiles sint, iterumque vero collecti, albedinem illam denuo spectandam exhibeant.

§. 705. Iisdem porro experimentis constat, albedinem hanc minus fore absolutam, simulac radiorum coloratorum ex quibus conflata est, quidam abfuerint, ut adeo hinc pateat, ad constituendam albedinem omnibus veluti numeris absolutam, definitam singulorum istorum radiorum requiri quantitatem, definitamque esse inter eos rationem, qua seruata albedo obtinebit, quae gradu tantum a qualibet alia differre poterit.

§. 706. Etsi vero ratio ista vix definiri queat, assumenda tamen erit instar principii,

cui ſuperſtruenda eſt corporum, quae alba d cuntur, definitio, eorumque variae, quae dari poſſunt ſpecies.

§. 707. Ut ergo illud tantum lumen vere album dicitur, quod radios coloratos in ea ratione emittit, quae ad conſtituendam albedinem requiritur, ſic quoque corpora opaca alba dicentur ea quae lumen coloratum in eadem hac ratione reflectunt. Cumque poſteriori hoc caſu albedo tantum a lumine reflexo pendeat, patet, perinde fere eſſe, ſiue lumen in ea ratione incidat, quae ad albedinem requiritur, ſiue alia adfuerit inter colores luminis incidentis ratio.

§. 708. An vero detur corpus perfecta albedine gaudens, maxime dubitandum. Nimium quantum enim omnia in hoc qui actu eſt rerum ſtatu inuicem permixta ſunt, quam ut ad unam candemque ſimpliciſſimam legem ſeſe componant. Cum vero poſſibilitas iſtiusmodi corpori denegari vix poſſit, nil impedit, quo minus albedinem hoc ſenſu abſolutam admittamus, a qua ceteri albedinis gradus ceteraeque ſpecies computandae ſunt.

§. 709. Porro utique diſtinguenda venit *albedo luminis*, ab ea quae *corpori opaco* tribuitur, cum haec ab illa pendeat. Summus vero albedinis gradus, ſi eam ad lumen ipſum referas, huiuſque ſpectes intenſitatem, indefinitus eſt, cum in infinitum eum augeri poſſe ponendum ſit. Unitas ergo, ad quam gradus iſti ſunt referendi, admodum eſt arbitraria, ut in ſingulis caſibus, quibus a o ad infinitum uſque excurrit quantitatum menſura, eſſe ſolet.

§. 710.

§. 710. Contra ea dabitur albedinis gradus summus isque definitus, si corpus spectes opacum, a lumine albo ita collustrandum, ut itidem album videatur. Illud enim nobis hic *absoluta albedine* gaudere dicetur, quod lumen vere album in eius superficiem incidens totum quantum incidit, iterum reflectit, atque quaquauersum dispergit.

§. 711. Cum ergo hac ratione albedo corporis opaci simpliciter ad eius vim reflectentem reducatur, facile patet, eatenus perinde esse, quaenam sit luminis incidentis intensitas. Hac enim utcunque aucta vel imminuta, augebitur quoque vel minuetur intensitas luminis reflexi, quod vero debita manente inter colores luminis incidentis ratione, eandem albedinem, gradu tantum diuersam, spectandam sistet.

§. 712. Huiuscemodi corpus in rerum natura vix dari iam monuimus (§. 708.) Eorum certe, quae nouimus, nullum est, quod nullum lumen absorbeat, quodque cunctos radios aeque reflectat. Ut vero radiorum amissorum quantitas experimentis & calculo definiri possit, utique necessarium erit, in ea corpora curatius inquirere, quae lumen omne reflectere absolutaque albedine gaudere assumimus. Videamus ergo, quid obtineat in casu illuminationis absolutae, cum ad hunc ceteros omnes in superioribus reduci posse ostendimus.

§. 713. Sit ergo AB planum luminosum infinite extensum, huic opponatur planum DE absolute album, patet quodlibet huius plani punctum F absolute illuminari (§. 100.) Fig. 69.

Claritas plani AB vocetur $= L$, ſpatiolum F dicatur = 1. Porro ſumto radio quolibet CQ deſcriptus concipiatur circulus, cuius diameter ſit QR, centrum C ipſi F normaliter immineat, patet ex ſuperioribus quantitatem radiorum per conum QFR in F incidentium eſſe π. ſin QFC.$^2 L$. (§. 121.) adeoque quantitas e toto plano AB in ſpatiolum F incidens $= \pi L$.

§ 714 Porro ſit claritas ſpatioli F abſolute illuminati $= \lambda$, atque per ſupra demonſtrata erit quantitas radiorum per conum QFR in circulum QR incidens $= \lambda\pi$ ſinQFC^2(§. 125.) ſimiliterque ea, quae in totum planum AB reflectitur erit $= \lambda\pi$. At vero cum planum DE ponatur perfecte album, quantitas haec erit eadem, quae in ſpatiolum F incidebat, quamquae vidimus eſſe $= \pi\lambda$. Unde fiet

$$\lambda\pi = L\pi$$
$$\lambda = L$$

ſimiliterque ob

$$\lambda\pi \sin QFC^2 = L\pi \sin QFC^2$$

hinc utrumque ſequens deducetur

THEOREMA XXXI.

§. 715. *Si corpus abſolute album abſolute illuminetur, eadem erit eius claritas, quae eſt claritas luminis ſiue obiecti illuminantis.*

THEOREMA XXXII.

§ 716. *Si corpus abſolute album ab alio quocunque luminoſo abſolute illuminetur, quantitas radiorum in datum corporis luminoſi ſpatium reflexorum eadem eſt, quae ex iſto ſpatio in corpus album inciderat.*

DE-

DEMONSTRATIO.

Est enim quantitas e circulo QR in F incidens $= \pi L$ sin QFC^2, reflexa $= \pi\lambda$ sin QFC^2. Sed vidimus esse $L - \lambda$. Constat ergo propositum pro eo casu quo pars illuminans QR est circularis. Uniuersalius patebit, si differentiando quaeratur radiorum quantitas cuique circuli QR spatiolo in utroque casu debita. Facile enim patet, pro utroque eandem differentiari formulam. At ex differentialibus quaecunque compones spatia.

§. 717. Claritatem plani AB diximus $= L$ eamque a diuersitate radiorum, qui eam efficiunt independentem esse hoc ipso posuimus. Cum enim planum, D ob absolutam qua gaudet albedinem omnes radios nullo intercedente discrimine reflectat, patet hoc obtenturum, siue lumen incidens perfecte fuerit album, siue utcunque coloratum. Quodsi ergo planum AB fuerit rubrum, flauum viride &c. facile patet planum DE, cum sit albissimum hos tantum radios, qui incidunt fore reflexurum, atque in casu illuminationis absolutae aeque visum iri rubrum, flauum viride ac est planum AB, a quo illuminatur. Quod quidem ope camerae obscurae adeo fit manifestum, ut etsi charta, qua excipitur obiectorum imago, neque absolute sit alba neque absolute illuminata, nilominus obiecta eo colore depicta exhibeat, quo reipsa & oculis conspicua sunt.

§. 718. Ut ergo indifferens est plani AB claritas & color, simulac planum DE ponatur

 esse

esse perfecte album absoluteque illuminatum, ita contra ea secus res se habet, si planum DE minus album fuerit. Duplex vero hinc enascetur claritatis decrementum. His enim casibus pars quaedam luminis a plano DE absorbetur, ut etsi ceteroquin album sit, hoc ipso videatur esse obscurius, siue minori claritate gaudens. Quodsi porro insuper coloratum esse statuatur, alterum accedet claritatis decrementum, quippe nonnisi eos radios, qui colorem istum constituunt, atque ne quidem hosce, quotquot incidunt, reflectet, immo & ipsis reflexis immiscebit radios diuersi plane coloris. Hanc vero esse indolem corporum naturalium experimentis prismate institutis iam dudum constat.

§. 719. Diuersam esse radiorum coloratorum naturam, diuersamque eorum celeritatem, refractionem & reflexionem plurima experimenta notissima palam faciunt. Quanam vero ratione computanda sint singulorum vires illuminantes, quaenam esse debeat inter eos proportio, ut lumen album coefficiant, nondum liquet. Interim tamen utique concedenda erit eorum densitas & quantitas, eodem modo definienda, quo supra (§. 42. seqq.) utramque lumini competere vidimus. Hac vero distinctione ita iam utemur.

§. 720. Unitatem, per quam radiorum quantitas, quomodocunque demum haec sit concipienda, exprimenda est, admodum arbitrariam esse supra iam vidimus (§. 43.) Eodemque ergo modo & eae unitates, quibus quantitates radiorum coloratorum definiri debent,

bent, arbitrarias esse vel me tacente patet. Quare eas, prout conditiones problematis id requirent, variis modis assumemus, ita tamen ut semper ad legem homogeneorum reuocentur.

§. 721. Sic v. gr. si ponamus quantitatem luminis absolute albi $=1$, nil impedit, quominus & quantitatem radiorum rubrorum, viridium cet. seorsim spectatorum per totidem unitates exprimamus, quoties id requirit calculi concinnitas.

§. 722. Porro radii diuersi coloris assumendi sunt heterogenei, cum eos homogeneos esse vix demonstrari possit. At vero hoc ipso longe difficilior euadit comparatio, quae inter claritatem diuersorum colorum esset instituenda. Unicus vero datur casus, quo ista comparatio succedit. *Quodsi enim in colore quodam mixto eadem seruetur inter radios diuersi coloris ratio, coloris istius diuersi gradus haud difficulter inter se comparantur.* Gradu enim non specie color iste mutatur. Inquirendum ergo est, ubinam hic casus obtineat.

§. 723. Sit corpus quoddam mixto colore conspicuum rubro v. gr. & flauo. Ponamus istud a lumine collustrari, cuius claritas sit $=1$. Quodsi lumen hoc perfecte sit album, omnis generis radii in corporis istius superficiem incident, rubri vero & flaui aut soli aut fortius reflectentur, quam ceteri. Quodsi ergo ponamus reflecti dimidiam partem eorum qui incidunt, concessum iri confido, *eandem hanc partem dimidiam reflecti, etsi radii rubri & flaui soli inciderent, eamque duplicari, si quantitas incidentium*

dupli-

duplicet r. Non modo enim radii incidentes ſibi inuicem non obſtant (§. 50. ſeqq.) verum & ii, qui rubri ſunt, proprium, quo gaudent, colorem haud mutant. Quod experimentis ſatis ſuperque euictum eſt.

§. 724. Manente ergo corporis ſuperficie, quantitas radiorum cuiuſcunque coloris reflexa conſtantem ſeruat rationem ad quantitatem eorum qui incidunt.

§. 725. Corpus abſolute album cum abſolute illuminatur, eadem claritate gaudere vidimus, qua gaudet lumen, a quo illuminatur (§ 715) hanc ergo ceu unitatem ſpectare licet, ad quam ceteri albedinis gradus referuntur, ut adeo ea corporis opaci albedo nobis hic ſit $=1$, quae radios incidentes reflectit omnes, patetque aliam albedinem quamcunque eo fore minorem, quo pauciores radios reflectit. Quodſi itaque radii incidentes ponantur $=1$, reflexi $=q$, erit corporis albedo $=q$. Eodemque hoc modo computandos eſſe gradus rubedinis, viredinis ceterorumque colorum quatenus vim reflectentem ſpectant, facile intelligitur.

Fig. 70. § 726. Sit iam in L lumen, quod concinnitatis ergo globoſum ſtatuemus, huiuſque ſemidiameter ponatur $=1$, claritas $=\lambda$, ponamus eius radios normaliter incidere in planum abſolute album G, huius claritas in caſu illuminationis abſolutae itidem erit $=\lambda$ (§. 715.) At cum ob maiorem luminis diſtantiam minuatur radiorum incidentium quantitas, iam eius claritas tantummodo erit $=\lambda : GL^2$ (§. 115.)

§. 727.

§. 727. Quod si vero ponamus albedinem plani Ggγ non esse absolutam, verummodo $=A$, ut sit $1:A$ in ratione radiorum incidentium ad radios reflexos, in eadem hac ratione minuetur claritas $=\lambda:GL^2$, ut sit $=A\lambda:GL^2$. Unde liquet

THEOREMA XXXIII.

§. 728. *Si planum album a lumine sphaerico normaliter illuminetur, erit eius claritas directe ut factum ex claritate luminis illuminantis in albedinem plani illuminati, reciproce vero ut quadratum distantiae centri luminis sphaerici.*

§. 729. Ponamus iam in D esse aliud planum, ab eodem lumine normaliter illuminandum, dicta plani istius albedine $=a$, patet eius claritatem fore $=a\lambda:LD^2$.

§. 730. Quodsi ergo claritas plani G fiat $=C$, plani D $=c$, erit

$$C=A\lambda:LG^2$$
$$c=a\lambda:LD^2$$

§. 731. Planum G claritate C gaudere ponatur quasi ipsi propria esset, atque ponamus ab eo absolute illuminari planum aliud, cuius albedo $=a$, siue albedini ipsius plani D aequalis, iterum patet huius plani claritatem euadere $=Ca=aA\lambda:LG^2$ Hac iam claritate ita utemur.

§. 732. Recta GF ad DF normalis sit axis lentis AB, qua radii e plano G emanantes ita colligantur ut conuergant in planum F, ibique plani CGγ depingant imaginem fFφ. Quodsi iam ponamus lentem AB omnes radios transmittere, patet claritatem imaginis centralem in F pendere

dere a claritate C, qua gaudet planum G, atque ab illuminatione supra (§. 500.) definita, quam vidimus esse

$$r = \pi \frac{\text{tang AFC}^2}{\text{sec AGC}^2}$$

§. 733. Est vero π illuminatio absoluta, quam inuenimus esse $= aC = aAL : LG^2$, hoc ergo valore substituto erit claritas imaginis centralis

$$r = \frac{a.A.\lambda.\text{tangAFC}^2}{LG^2.\text{secAGC}^2}$$

§. 734. At enimuero cum lens haud ita sit diaphana, ut nulli radii reflectantur & dispergantur, ponamus radios incidentes esse ad eos, qui imaginem depingunt ut 1 ad $\varkappa$, atque patet fore

$$r = \frac{\varkappa.a.A.\lambda.\text{tangAFC}^2}{LG^2.\text{secAGC}^2}$$

Quodsi breuitatis ergo $\varkappa$ vocetur lentis impelluciditas, haec aequatio sequens suppeditabit

THEOREMA XXXIV.

§. 735. *Si planum album G a lumine globoso L collustretur, eiusque imago a lente AB proueniens in F excipiatur plano albo DF, habebitur imaginis F claritas centralis, si factum ex impellucitate lentis, claritate luminis L, albedine utriusque plani G, F, & quadrato tangentis anguli AFC, per factum ex quadrato distantiae luminis LG, & quadrato cosinus anguli ACG diuidatur.*

§. 736. Theorema hoc obtinet, si semidiameter globi L ponatur $= 1$, uti fecimus (§. 726.) Ceterum vel me tacente patet angulos AFC, AGC

AGC esse lentis AB semidiametros adparentes, si in F & G spectetur. Unde & his notionibus in efferendo hoc theoremate uti licebit, quo meris verbis exprimatur.

§. 737. Quodsi distantia GC distantia focali lentis AB vel decies maior fuerit, angulus AGC valde paruus euadit, & mutata vel multiplicata distantia GC angulus AFC parum mutabitur, adeoque his casibus claritas imaginis fere constans est. Contra ea claritas plani D directe a lumine L collustrati, quam vidimus esse (§. 730)

$$c - a\lambda : LD^2$$

admodum est variabilis, cum absoluta euadat, plano D lumini L ita admoto, ut eius superficiem contingat (§. 100.) contra ea euanescat, plano D a lumine L ad infinitam distantiam remouendo. Dabitur ergo distantia quaedam, ad quam claritas imaginis F claritati in D, quae lumini directo debetur, euadit aequalis.

§. 738. Ponamus iam hanc distantiam esse GF vel LF, atque erit $\eta = c$, adeoque (§. 730. 734.)

$$\frac{\varkappa . a . A . \lambda . \mathrm{tang} AFC^2}{LG^2 . \mathrm{sec} AGC^2} = \frac{a\lambda}{LD^2}$$

Qua aequatione debite reducta erit

$$\frac{\varkappa . A . \mathrm{tang} AFC^2}{LG^2 . \mathrm{sec} AGC^2} = \frac{1}{LD^2}$$

unde fiet

$$A = \frac{LG^2 . \mathrm{sec} AGC^2}{LD^2 . \varkappa . \mathrm{tang} AFC^2}$$

Quam aequationem sequens explicat

THEO-

THEOREMA XXXV.

§. 739. *Si planum* G *a lumine* L *normaliter illuminetur atque ope lentis* AB *eius imago* F *plano* DF *ad eam distantiam excipiatur, ad quam claritas imaginis centralis* F *claritati plani in* D *ab eodem lumine* L *directe collustrati euadat aequalis, habebitur* albedo *plani* G, *si factum ex quadrato distantiae luminis* LG *&* *quadrato secantis anguli* AGC *per factum ex impelluciditate lentis, quadrato distantiae luminis* LD *&* *quadrato tangentis anguli* AFC *diuidatur.*

§. 740. Theorema hoc, cum in Photometria maximi sit momenti, curatius nobis hic est euoluendum, Atque primo quidem recordandum est (§. 727.) albedinem A, quae per theorema hoc definitur, esse quantitatem radiorum reflexorum, si quantitas incidentium dicatur $= 1$; ut adeo euadat $A = 1$, simulac planum G, cuius albedinem refert, fuerit absolute album (§. cit.)

§. 741. Porro quantitatem $\varkappa$ breuitatis ergo vitri impelluciditatem vocauimus (§. 734.) at vera eius significatio supra iam definita (§. 734.) haec est, ut dicta quantitate radiorum in lentem incidentium $= 1$, sit $\varkappa$ quantitas ea, quae in F coincidit, atque imaginis claritatem constituit. Quomodo vero per experimenta curatius sit determinanda, iam in superioribus ostensum est (§. 517. seqq.)

§. 742. Porro notabimus, formulam erutam (§. 738.)

$$A = \frac{LG^2 . \sec AGC^2}{LD^2 \varkappa . \tang AFC^2}$$

quan-

quantitates a, λ non ingredi, *ut adeo albedo A hac ratione definiatur, quaecunque sit claritas luminis L & albedo plani* DF, *quo excipitur imago & lumen directe in* D *incidens*. Praestat tamen lumen clarius, cum error minor metuendus sit (§.270.) Praestat porro, chartam vel planum DF plano Gg esse prorsus simile tum ratione albedinis tum & vel maxime ratione coloris (§.308 sq.)

§. 743. Eandem ob caussam conuenit distantiam LG assumere mediocrem. Quodsi enim nimia esset, facile patet chartae G claritatem valde paruam fore euasuram, quod cauendum esse iamiam monuimus. Neque tamen nimis parua esse debet distantia LG. Cum enim tantum spectanda sit claritas centralis, atque supra (§.265. seqq.) ostensum sit, dari quoddam spatium $g\gamma$, ad sensum aeque illuminatum, angulumque maximum gLG decem gradus excedere haud debere, facile patet spatii $gG\gamma$ imaginem φFf ea fere claritate gaudere, quae claritati vere centrali sit aequalis. Cauendum ergo erit, ne spatium φf ita fiat exiguum ut visu sit difficilius. Quod cum fieret si distantia GL esset nimis parua, haec utique erit augenda. Ceterum facilius in dato quouis casu experimentis definitur.

§. 744. Aucta distantiarum LG, LD alterutra & altera augetur, cum eadem albedo A sit directe ut LG^2 reciproce ut LD^2. etsi ergo aucta distantia GL augeatur spatium Gg, attamen ob auctam simul distantiam LD minuetur spatium imaginis Ff. Quare & hanc ob caussam, distantia GL determinanda erit ea, quae spatium claritatis centrali fere aequa-

 lis

lis facile ſpectabile ſiſtat, ſimulque ipſam claritatem notabiliorem reddat.

§. 745. Porro angulus AGC plerumque gradum unum non excedit unde abſque notabili errore fiet

$$AG = GC, \text{ \& sec } AGC = 1.$$

Quo aſſumto habebitur

$$A = \frac{LG^2 . CF^2}{LD^2 . AC^2 x}$$

Quo ergo modo dabitur albedo *A* per meras diſtantias.

§. 746. Lumen L aſſumſimus eſſe ſphaericum, quo concinnior euaderet formula eruenda. Hoc enim modo factum eſt, ut illuminatio utriuſque plani G, D directa ſimpliciter eſſet reciproce ut quadrata diſtantiarum GL, DL. At vero haud difficulter uniuerſalius res abſoluetur. Dicta enim illuminatione G directa $= I$, in D $= i$, erit

$$A = \frac{i . CF^2}{I . AC^2 . x}$$

Quaecunque ergo ſit figura luminis L, facile ea definita dabitur ratio $i : I$ per ea theoremata, quibus in ſuperioribus (P. I. C.II.) illuminationem directam pro quibuſuis caſibus definiuimus. At vero curatiori hoc calculo haud opus erit, ſimul ac diſtantia GL diametro vel latitudine luminis pluries maior fuerit, Ponamus v. gr. L eſſe flammam candelae, huius figura vera proxime erit conica, adparens vero a triangulari haud ita multum abludet. Quodſi ergo diſtantia GL altitudinem coni quater vel pluries excedat, per theore-

rema XII (§. 145.) facile patebit absque notabili errore fieri posse

$$l:i = LD^2:LG^2$$

ut adeo ponere liceat

$$A = \frac{LG^2.CF^2}{LD^2.AC^2.x}$$

Ceterum in sumendis experimentis opus est cautelis supra descriptis (§. 312. 311. 309.) cum plures ob caussas maxime difficilis sit comparatio inter claritatem directam in D & eam, qua gaudet imago F. Hisce quoque cautelis accedunt specialiores illae, quas pro casu praesenti iamiam descriptas dedimus (§. 742. seqq.)

EXPERIMENTVM XXVI.

§. 747. Erecto in $gG\gamma$ scapo chartae albissimae, in L collocaui candelam ita emunctam, ut flamma eius utrinque aeque videretur clara & aeque conica, atque radii normaliter inciderent in G. Sumta porro lente, cuius impelluciditatem instituto experimento XIX. (§. 517.) inueneram esse $x = \frac{5}{6}$ (§. 741.) eam in AB ita plano G obieci, ut imago in F charta aeque alba excepta eadem gaudere videretur claritate, qua charta in D directe a lumine candelae collustrata. Tentando quaerendam fuisse distantiam GC vel LC me non monente patescit. Ea vero reperta dimensus sum distantias LD, LG, a centro flammae candelae computandae, in digitis parisinis. Cumque scirem distantiam lentis focalem pro radiis parallelis esse $= 6\frac{1}{3}''$, calculo definiui distantiam imaginis CF distantiae GC respon-

dentem. Denique semidiametrum aperturae AC inueni esse =0,93. dig. His ergo valoribus in formula (§. 745. 746.)

$$A = \frac{LG^2.CF^2}{LD^2.AC^2.x}$$

substitutis experimento undecies iterato sequens inde enata est tabella

Exp.	Ex obseruatione GL	LD	Ex calculo CF	A
1	5	65	7,04	0,4080
2	6	78	6,89	0,3898
3	$6\frac{1}{4}$	79	6,88	0,4110
4	7	86	6,84	0,4300
5	7	90	6,81	0,3891
6	7	88	6,81	0,4071
7	8	96	6,80	0,4454
8	8	110	6,72	0,4172
9	10	122	6,68	0,4159
10	10	125	6,67	0,3950
11	12	147	6,60	0,4041

§. 748. Quodsi iam valores ipsius A in summam contrahantur, erit haec =4,5126, qua per numerum obseruationum 11 diuisa, prodit valor ex cunctis medius =0,4102. Omisso vero experimento septimo utpote maxime aberrante, est summa ceterorum = 4,0672, & ex his valor medius =0, 4067, qui a priore 0,4102 differt parte 0,0035 siue $\frac{1}{118}$ ipsius valoris 0,4067, ut adeo vix magis a vero aberret (§. 294.)

§. 749.

§. 749. Cum itaque albedo scapi chartarum albissimi sit proxime $= 0,4102$ siue numero rotundo $= \frac{2}{5}$, patet *eam ab absoluta albedine multam abesse atque ista plus duplo esse minorem.*

§. 750. Porro hinc patet, *splendorem huius chartae, cum absolute illuminatur tantummodo esse* $\frac{2}{5}$ *splendoris luminis a quo illuminatur.*

§. 751. Similiter euidens est, *scapum istum* $\frac{3}{5}$ *radiorum incidentium absorbere, atque nonnisi* $\frac{2}{5}$ *ab eo reflecti.*

§. 752. Adhibita charta unica, eaque plano nigro adfixa, inueni eius albedinem fere $\frac{2}{13}$, eadem vero inter candelam & lentem collocata, inueni radios, quos transmittebat esse $\frac{1}{8}$ incidentium. Charta regia, ob albedinem & crassitiem fere nullos radios transmittens, duas quintas partes reflexit, haud secus ac chartarum scapus.

§. 753. Contra ea charta bubula, calore cinereo subfusco vix $\frac{1}{12}$ radiorum reflexit. Charta colore subcaeruleo clariore octauam radiorum incidentium partem reflectere valuit. At vero cum omnes chartas ideo minus reflectentes esse suspicarer, quod nimis sint porosae, experimentum ita instauraui.

EXPERIMENTVM XXVII.

§. 754. Ex cerussa albissima, quam vulgo Cremserweiß vocant, paraui pigmentum, hocque chartae regiae albissimae ita illeui, ut nullum amplius lumen transmitteret. Quo facto chartam hoc modo pigmentatam collocaui in G, eademque ratione quaesiui lentis

AB diſtantiam eam, qua imago F aeque videretur clara ac charta in D directe colluſtrata. Experimento ſepties repetito calculoque ſubducto inueni

Exp.	Ex obſeruatione GL	LD	Ex calculo CF	*A*
1	$4\frac{3}{4}$	60	7,14	0,4567
2	$4\frac{5}{8}$	$61\frac{1}{2}$	7,08	0,4295
3	$4\frac{5}{8}$	65	7,05	0,3812
4	6	$76\frac{1}{2}$	6,91	0,4074
5	6	69	6,99	0,5125
6	7	90	6,81	0,3892
7	$8\frac{1}{4}$	95	6,80	0,4740

§. 755. Quodſi ergo iterum ex his valoribus ipſius albedinis *A* ſumatur media, erit haec = 0,4358, ſiue neglecto experimento quinto, quippe quantitas 0,5125 ceteras omnium maxime excedit, erit media ex ceteris = 0,4230, quae a media ex omnibus deducta 0,4358 differt parte 0,0128 ſiue $\frac{1}{34}$. Ut adeo albedo ceruſſae, quae chartae erat illita, proxime ſit = 0,4230. At experimento praecedenti inuenimus albedinem ſcapi chartarum = 0,4067. Patet ergo utramque per parum diſcrepare, cum differentia tantum ſit = 0,0163. ſiue $\frac{1}{26}$ albedinis ipſius ceruſſae.

EXPERIMENTVM XXVIII.

§. 756. Sumtis duabus chartis minio pigmentatis, alteram poſui in G alteram in F

F, atque haud secus ac in utroque experimento praecedenti debitam quaesiui distantiam GC siue GF. Experimento octies instaurato, calculoque eodem modo, quo supra subducto, inueni fuisse.

Exp.	Ex obseruatione GL	LD	Ex calculo CF	*A*
1°	4″	59″	7,″14	0,3250
2	5	72	6,97	0,3250
3	$5\frac{1}{4}$	80	6,88	0,2828
4	6	83	6,85	0,3401
5	6	86	6,83	0,3150
6	7	108	6,73	0,2639
7	8	120	6,68	0,2753
8	10	151	6,60	0.2656

Summa quantitatum *A*, quas experimenta haec dederunt est = 2,3927, unde media = 2,3927 : 8 = 0,2991. Abiecto vero experimento quarto, quippe quod maxime a ceteris abest, erit media ex ceteris *A* = 0,2932, quare differentia utriusque mediae = 0,0059 siue fere $\frac{1}{50}$ ipsius 0,2991.

EXPERIMENTVM XXVIIII.

§. 757. Sumtis iterum duabus chartis succo baccarum rhamni collitis, alteram collocaui in G alteram in DF, atque ut in experimentis praecedentibus quaesiui distantias GD, LC, adquam imago F & charta in D aeque videretur flaua, croceo fere colore conspicua.

spicua. Experimento octies iterato inueni fuisse.

Exp.	Ex obseruatione GL	LD	Ex calculo CF	*A*
1	$3\frac{1}{2}''$	58″	7,″17	0,2597
2	4	60	7,14	0,3143
3	$4\frac{1}{2}$	69	7,01	0,2899
4	5	78	6,90	0,2714
5	5	82	6,86	0,2428
6	$5\frac{1}{2}$	89	6,83	0,2472
7	6	90	6,82	0,2868
8	6	99	6,81	0,2363

Summa quantitatum *A* hic est = 2,1483, unde media = 2,1483:8 = 0,2685. Omisso uero experimento secundo utpote a ceteris maxime recedente, est ceterorum summa = 1,8340, hinc *A* media = 1,8340:7 = 0,2620, quare differentia utriusque mediae = 0,0065 siue fere $\frac{1}{40}$ ipsius 0,2620.

EXPERIMENTVM XXX.

§. 758. Simili modo chartam aerugine cupri tinctam atque ita imbutam, ut ex aduersa parte aeque fere esset viridis, in G erectam posui, alteram eodem modo collitam posui in DF, huiusque debitam quaesiui distantiam, ut in experimentis praecedentibus. Experimento nouies instaurato inueni fuisse

Exp.

Exp.	Ex obseruatione GL	LD	Ex calculo CF	A
1	3″	63″	7,″09	0,1518
2	3	75	6,96	0,1075
3	$3\frac{1}{2}$	86	6,85	0,1078
4	4	93	6,81	0,1190
5	4	89	6,84	0,1311
6	4	97	6,80	0,1091
7	$4\frac{1}{2}$	111	6,73	0,1017
8	5	116	6,70	0,1156
9	6	131	6,66	0,1219

Summa quantitatum A hic est = 1,0772, unde media = 0,1197. Sed omisso experimento primo, quod a ceteris nimium differt erit summa = 0,9191 unde media = 0,9191:8 = 0,1149, differentia inter utramque mediam = 0,0048 siue $\frac{1}{24}$ ipsius 0,1149. Ceterum in hoc experimento distantias GL assumsi minores, ne nimis augeretur distantia LD, quod impediendum erat, quo facilior esset comparatio inter claritatem utriusque coloris in F & D. (§.743.)

§. 759. In tribus his experimentis literam A non albedinem sed colorem chartae F denotare, vel indicasse sufficit. Quidnam vero hic denotet unitas, ad quam valores ipsius A sunt referendi haud ita facile dignoscitur. Quodsi tamen in experimento XXVIII°(756.) minium chartae illitum rubedine gauderet purissima, ut praeter radios rubros nullos reflecteret, qui diuersi sunt coloris diuersaeque speciei, haud ego ambigerem, his exclusis,

 illos

illos solos per unitatem istam designare, ut quantitas radiorum rubrorum in chartam istam incidentium efferenda esset per 1, quantitas reflexorum per *A*. Hoc enim casu ceteri radii, cum omnes absorberentur spectari possent ceu non incidentes.

§. 760. At vero hic omnia longe secus se habent. Nequaquam enim assumere licebit, minium omnes radios diversi coloris absorbere, atque nonnisi eos reflecti, qui rubi sunt, etsi hi utique maiori copia reflectantur. Cumque lumen candelae subflauum sit, facile patet radios coloratos ipsi non inesse in ea ratione, quae lumini vere albo debetur. Porro quaelibet radiorum species a charta pigmentata peculiari ratione reflectitur, ut adeo ratio inter eos, qui in imaginem F incidunt, postquam iam in G reflexionem passi sunt, diuersissima est ab ea ratione, qua directe incidunt in G & D.

§. 761. Huius dubii discussionem uberiorem in sequentibus dabimus, ubi de coloribus agendum erit, hic vero sequentia notabimus, ut quid sibi velit ratio 1:*A* quodammodo intelligatur.

§. 762. Radios diuersi coloris heterogeneos esse iam supra monuimus. (§. 718. seqq.) Cum vero inuicem utcunque permixti colorem quendam compositum constituant, haud ita certe heterogenei sunt statuendi, quasi omnem comparationem respuerent, neque in summam contrahi possent. Etsi vero hactenus desint unitates, ad quam reuocari deberet eorum quantitas & intensitas, attamen experimen-

rimentis pluribus modis compare licet eorum summam. Etenim in experimentis ultimo descriptis retenta eadem candela, definita adest inter colores emanantes relatio, atque retenta eadem charta definita quoque est ratio inter quantitates radiorum diuersi coloris reflexas, adeoque & ratio inter eos, qui incidunt in imaginem F. Horum summam utique per unitatem exprimere licet eam, quae aderit in casu illuminationis absolutae, etsi haud constet, quotam huius summae partem singuli efficiant. Similiter charta DF a charta G absolute illuminata definitam radiorum incidentium quantitatem reflectet, quam itidem veluti in summam contractam determinare licet, etsi quantitates singulorum colorum, qui summam istam coefficiunt adhucdum lateat. Hanc vero summam esse $= A$, infra videbimus, ubi simul patebit, *dicta quantitate radiorum ea ratione permixtorum, qua in* F *incidunt* $= 1$, *fore quantitatem a charta* F *reflexorum* $= A$, *quomodocunque iam inuicem permixti sint.*

§. 763. Pigmentum chartae tenuissime illitum, quod exempli ergo rubrum esse ponemus, omnis generis radios reflectet, quantumuis pura sit eius rubedo. Simulac enim ceteri radii, quos pigmentum istud absorbet, in ipsam chartae superficiem inciderunt, ab hac iterum magna ex parte repercutiuntur. At vero pigmentum, cum ob maximam tenuitatem fere pellucidum sit, (§. 617.) transitum ipsis haud quaquam denegat, unde fit, ut plurimi eorum iterum in aerem egrediantur. Huius rei exemplum sistit utrumque experi-

perimentum XXVIII. & XXIX. Charta enim pigmento non erat imbuta verummodo illita. Hoc vero quantitas luminis reflexi notabiliter aucta est, ut ad tertiam & quartam partem luminis incidentis accederet. Fuit enim pro charta rubra $A = 0{,}2932$, pro charta flaua $A = 0{,}2620$. Contra ea in experimento trigesimo, ubi charta aerugine viridi imbuta erat, quantitas reflexa nonam partem incidentis vix superabat. Erat enim $A = 0{,}1149$.

EXPERIMENTVM XXXI.

§. 764. Collocata iterum in G charta cerussa pigmentata, in DF successiue posui chartam albam, rubram, flauam, viridem & caeruleam obscuriorem, eodemque modo, eadem manente distantia GL, quaesiui distantiam lentis, ad quam imago F aeque videretur illuminata ac charta in D. In singulis his experimentis imago eodem colore erat conspicua, quo gaudebat charta ea, qua excipiebatur. Distantia GL erat constanter 5 digitorum, atque distantiam LD pro charta DF alba, rubra, viridi & caerulea inueni fuisse circiter 64 digitorum. Contra ea pro charta flaua distantia ista duobus aut tribus digitis videbatur necessario minuenda.

§. 765. Clarior itaque erat imago charta flaua excepta. At vero hanc differentiam neutiquam a lumine L, neque a charta DF pendere supra vidimus (§. 742.), unde soli chartae LG videtur tribuenda. Etsi ergo huic illita erat cerussa albissima, nilominus hinc sequi videtur, & hanc albedinem eo defectu laborare,

borare,

borare, ut radios flauos copiosius reflectat. At his infra curatius pertractandis erit locus. Jam ad corpora alba reuertemur.

§. 766. Definita albedine corporis cuiuslibet, hand difficilis est comparatio inter claritatem, qua gaudet, cum à lumine quodam illuminatur, & claritatem ipsius luminis. Posita enim albedine luminis $=1$, albedine obiecti illuminandi $=A$, sequentia hinc deducentur theoremata.

THEOREMA XXXVI.

§. 767. *Claritas luminis est ad claritatem obiecti albi ab eo absolute collustrati ut 1 ad A.*

DEMONSTRATIO.

Quodsi enim obiectum esset absolute album, eius claritas in casu illuminationis absolutae a claritate ipsius luminis, a quo collustratur haud differret, (§. 710. 715.) quippe omnes radios, quotquot incidunt, reflecteret. At vero cum hic minor esse ponatur albedinis gradus, haud omnes radii reflectentur, unde cum claritas decrescat in ratione radiorum reflexorum, patet eam decrescere ut 1 ad A (§. 727.)

THEOREMA XXXVII.

§. 768. *Dicta claritate luminis collustrantis $=1$, illuminatio absoluta abit in claritatem obiecti ab eo absolute illuminati, si in vicem ipsius π substituatur albedo A.*

DEMON-

DEMONSTRATIO.

Decrescit enim claritas obiecti ut illuminatio, quare ut ex hac habeatur illa, pro π substituenda erit *A*. (§. 122.) Etenim in singulis formulis supra erutis illuminationem absolutam per π expressimus.

§. 769. Cum ceterae illuminationes omnes, quas in superioribus pro singulis casibus definiuimus, ad illuminationem absolutam reuocatae sint, *hoc theoremate ipsae claritates ad claritatem luminis reuocantur.* Cumque substitutione facta, quam hoc theorema praecipit, nil sit facilius, singulis istis casibus hic denuo euoluendis iure meritoque supersedere licet.

§. 770. Corpus illuminatum iterum corporis illuminantis vicem sustinet (§. 703.) simulac aliud corpus opacum ipsi obuertatur. Data vero utriusque albedine, facile utriusque claritas tum inter se, tum & cum claritate luminis, a quo prius illuminatur, comparabitur. *Ut adeo omnes omnium corporum alborum claritates quibus singulis casibus gaudent inter se conferri hac ratione possint.*

THEOREMA XXXVII.

§. 771. *Si duo corpora eidem lumini eodem modo obiecta aeque sint ab eo illuminata, eadem erit utriusque albedo.*

DEMONSTRATIO.

Cum enim eodem modo illuminentur, eadem erit quantitas radiorum in datum spatiolum in utroque incidentium. Quare claritas tantummodo ratione quantitatis radiorum reflexorum

xorum diuersa esse poterit. At vero utriusque corporis claritas ponitur eadem, adeoque eadem in utroque erit ratio inter radios incidentes & reflexos, quod cum indicio sit eandem adesse albedinem (§. 727.) constat propositum.

§. 772. Facilis igitur est corporum aeque alborum comparatio, cum ista eidem lumini eodem modo obiicere sufficiat. Quod si enim hoc modo aeque videantur clara, ab aequali albedine haud ita multum aberunt.

§. 773. Contra ea si inaequalis prodeat claritas, aut luminis distantia, aut obliquitas incidentiae ita immutari poterit, ut ad aequalitatem reducatur. Quo facto *albedines reciproce erunt vel ut quadrata distantiae vel reciproce ut sinus incidentiae, prout vel illa vel hic mutatus fuerit.* Ceterum cum a vero aliquantum aberrare possit oculi iudicium, conuenit experimentum pluries instaurare, quo ex singulis sumi possit medium a vero minus aberrante (§. 294. 276.)

§. 774. Definita itaque albedine quadam per experimentum XXVI. (§. 747.) haud difficulter hac quoque ratione dabitur albedo cuiuscunque alius corporis, atque simul patet, murum dealbatissimum, gypsum, chartam albissimam, pigmentum ex cerussa paratum, lintea in sole candefacta, cretam albissimam cet. si albedinem spectes, parum inter se differre.

§. 775. Ut ergo hoc modo inter se comparantur albedines corporum, ab eodem lumine collustratorum, ita quoque claritas vel albedo ipsorum luminum inter se conferuntur,

tur, si ipsis eadem superficies alba exponatur, vel si eorum imagines ope lentis causticae excipiantur. Erit enim luminis claritas directe ut area aperturae lentis, reciproce ut quadratum distantiae imaginis, si haec facta sit aeque clara.

§. 776. Porro data obiecti albedine, eius claritas directe cum claritate obiecti illuminantis comparabitur, per theorema XXXVII. (§. 768. seq.)

§. 777. Sit v. gr. claritas solis ea, qua per atmosphaeram videtur, $=L$, eius semidiameter adparens $=16'$. atque ipsi normaliter opponatur planum vel charta cerussa pigmentata, cuius albedinem supra (§. 755.) vidimus esse $=0,4240=A$. Dicta ergo eius claritate $=\eta$, erit (§. 121. 768.)

$$\frac{\eta}{L}=0,4230.(\sin 16')^2=0,000009163.$$

siue

$$L=109137.\eta.$$

Toties ergo claritas solis, cum per eandem athmosphaeram videtur, per quam eius radii in chartam ipsis obiectam normaliter incidunt, claritatem chartae hoc modo ab eo collustratae excedit.

§. 778. Parum itaque abest, quin singulae claritates luminum corporumque alborum ad numeros absolutos reduci possint. Equidem albedines corporum eo iam vides reductas, ut veluti per se atque independenter ab alio quocunque albedinis gradu intelligi possint, cum omnes simpliciter cum albedine absoluta com-

comparentur, omnesque per eam rationem exprimantur, quae est inter radios incidentes atque reflexos. (§. 740.) At vero ista ratio veluti per se subsistit.

§. 779. Secus vero rem se habere, si claritatem spectes, iam supra notauimus (§. 709.) Nulla enim hic datur unitas absoluta, ad quam ceteri claritatis gradus referri possent. Infimus itaque est = 0, cum ab absolutis tenebris claritatis luminisque gradus computandi sint. Summus vero splendor in rerum natura vix datur, ut dubium sit, quinam iste esset futurus, cum vel in infinitum excurrere possit.

§. 780. Cum itaque unitas ista sit admodum arbitraria, eiusmodi assumenda erit, quae constanter proxime eadem esse reperitur. Mea quidem sententia plures assumere conuenit. Pro luminibus admodum intensis *claritatem solis* assumemus. Pro iis qui minores sunt, vel *claritatem lunae plenae* eamque visam, vel quod praestat, *claritatem plani absolute albi a sole in data distantia collustrati* unitatem alteram ponemus. Denique claritas istiusmodi plani a luna plena vel a sole in distantia vel centies millies maiori collustrati tertiae unitatis vicem sustinebit.

§. 781. Duo vero sunt, quae unitates istas vel dubias vel minus commodas reddere valent. Etenim haud constat, an perpetuo eadem sit solis claritas, etiamsi a maculis, quibus quandoque eius discus obtegitur, animum abstrahamus, utpote ob paruitatem contemnendis. Cum enim omnia, quae in hoc rerum uniuerso sunt, admodum sint mutabilia, vix

Z tuto

tuto assumes, unum solem ab ista mutabilitate esse liberum. Ego tamen, si quis adfirmatum eat, hanc mutabilitatem valde paruam esse, haud dissentiam.

§. 782. Alterum, quod minus commodam reddit unitatem istam, est mutabilitas athmosphaerae telluris, quam radii solares transeunt, antequam sese nobis spectandos sistant. Hoc vero ipso cum claritas solis oculo spectabilis vehementer turbetur, singulis casibus calculus quem infra exponemus, est subducendus, quo unitas assumta sibi constet.

§. 783. Defectui isti, quo Photometriam adhucdum laborare supra iam monuimus (§. 11.) medelam adferre nondum valui, ut adeo proxime tantum gradus luminis ad communem quandam mensuram reuocare liceat.



PHO-

PHOTOMETRIAE
PARS IV.
QVA CALCVLO ET EXPERIMENTIS DEFINITVR SENSVS LVMINIS HVIVSQVE CLARITAS ADPARENS.

CAPVT I.

Praeſtruitur calculus, quo definienda eſt claritas luminis ea, quae oculo iudice obiectis ineſſe videtur.

§. 784.

Eam iam Photometriae partem inchoamus, quae ceteris praemittenda fuiſſet, niſi ordinem hunc turbaſſet circulus ille logicus, quem in demonſtrandis Photometriae legibus vix euitabilem eſſe ſupra diximus (§ 28.) quemque iam claudemus, cum eo ſimus redituri, unde ſumus profecti. Ita vero rem omnem a nobis peractam eſſe facile patebit intuenti, ut experientia duce ea tantum de claritate viſa ſeu adparente praelibaremus, quae ad definiendam luminis claritatem veram, verasque eius modificationes vel neceſſario erant praeſtruenda, quaeque nunc demum, cum curatius euolutae ſunt Photometriae leges, ad liquidum ſunt perducenda, quo pateat, quatenus

nus a claritate vera differat ea, quam oculo iudice, obiectis tribuimus.

Fig.71. §. 785. Sit igitur oculus AF, eius axis GAFM, in G sit obiectum, quod breuitatis ergo circulare ponemus, ut eius semidiameter sit Gg. Punctum G sit in axe, atque ex eo emanet radius GB, qui in B ita refringitur ut, nisi noua accederet refractio in axin incideret in M. Sit cC apertura pupillae atque ponamus radium GB esse extremum eorum qui pupillam transeunt. Radius iste incidit in chrystallinum in D, ibique ita refringitur ut absque noua refractione perueniret in N. At vero cum in superficiem posteriorem chrystallini incidit in E, ibi tertiam patitur refractionem, atque cum axe coincidit in F, si obiectum ad eam distantiam intueatur oculus, ad quam distincte istud videt. Ceteris casibus punctum F non erit in retina, sed vel intra vel extra oculum cadet, prout obiectum fuerit vel remotius vel propius.

§. 786. Sit porro radius gG obliquius incidens, hic iterum triplicem subibit refractionem, atque tandem in retinam incidet in f, ut adeo totius semidiametri Gg imago sit Ff.

§. 787. Producta recta gA in φ, constat ex theoria, quae in dioptricis traditur, esse AF, proxime $fF = \frac{2}{3}\varphi F$. Siue faciendo $KF = \frac{2}{3}AF$, ductaque KF ipsi $gA\varphi$ parallela, erit Ff imago rectae vel semidiametri Gg. Unde ergo, data obiecti semidiametro adparente vel angulo $GAg = \varphi AF$, dabitur semidiameter imaginis Ff.

§. 788.

§. 788. Fiat Ab=AB, atque ducta recta gb erit bgB conus extremus (§. 494.) radios eos complectens, qui e puncto g per aperturam pupillae in eius imaginem f coincidunt.

§. 789. Hinc iam haud difficulter per supra demonstrata dabitur quantitas radiorum q, qui e toto obiecto in spatium circulare cuius diameter = Bb incidunt, erit enim (§. 222.)

$$q = \frac{\pi\pi . Gg^2 . AB^2}{((gb+gB):2)^2}$$

siue cum rectae gb, gB fere non differant, breuius erit

$$q = \frac{\pi\pi Gg^2 . AB^2}{gA^2}$$

§. 790. Dicta porro imaginis Ff claritate media $=\eta$, erit (§. 497.)

$$\eta = \frac{\pi . Gg^2 . AB^2}{gA^2 . Ff^2}$$

§. 791. Est vero proxime

$$Gg : gA = F\varphi : AF$$

adeoque facta substitutione habetur

$$\eta = \frac{\pi . F\varphi^2 . AB^2}{Ff^2 . AF^2}$$

Sed ob

$$F\varphi : Ff = 3 : 2$$

breuissime erit

$$\eta = \tfrac{9}{4}\pi . \text{tang} BFA^2$$

THEOREMA XXXVIII.

§. 792. *Illuminatio absoluta est ad illuminationem imaginis in retina oculi depictae mediam, ut $\frac{4}{9}$ quadrati sinus totus ad quadratum tangentis anguli AFB.*

THEOREMA XXXIX.

§. 793. *Illuminatio absoluta est ad illuminationem imaginis in retina oculi depictae ut area circuli, cuius semidiameter = KF, ad aream aperturae bAB.*

DEMONSTRATIO.

Est enim (§. 791.)

$$\eta = \frac{\pi . F\phi^2 . AB^2}{Ff^2 . AF^2}$$

Sed vidimus esse (§. 787.)

$$F\phi : Ff = AF : KF$$

quare facta substitutione erit

$$\eta = \frac{\pi . AB^2}{KF^2}$$

unde

$$\pi : \eta = \pi . KF^2 : \pi . AB^2$$

Sunt vero $\pi . LF^2$, $\pi . AB^2$ areae circulorum, quas effert theorema, quare &c.

§. 794. Patet ergo hinc, claritatem imaginis a distantia obiecti esse independentem, nisi haec admodum fuerit parua, quo vero casu imago Ff haud erit distincta, atque calculo opus erit, qui prorsus similis erit illi, quem supra lentibus causticis adplicauimus. (§ 5:8 seqq.)

§. 795. Pendet vero claritas imaginis a pelluciditate humorum oculi, potissimum chrystallini, quippe qui crescente aetate admodum flauescit. Porro quantitas quaedam radiorum in superficies refringentes B, D, E incidentium, ab istis reflectitur, quam, medium quoddam sumendo, sextam fere incidentium partem esse autumo. Quatenus vero hanc constantem ponere licet, claritas imaginis erit

erit in ratione composita areae pupillae & illuminationis absolutae. Haec vero cum unice ab ipso obiecti splendore pendeat, consequens est; *manente pupillae apertura obiectum eo clarius videri, quo clarius reipsa fuerit, atque eatenus claritatem adparentem cum vera coincidere.* At vero haec secus se habent, cum apertura ista, aucta luminis claritate & magnitudine, minuatur, unde, quod in sequentibus agemus, quaerendum est, quaenam sit inter tres istas quantitates relatio atque habitus. Iam vero videbimus, quaenam prodeat claritas obiectorum, si oculus perspicillis armetur. Eo vero breuioribus in hisce perquirendis esse licebit, quo plura iam eaque maxime uniuersalia hac de re reperias in operibus quae de re optica scripserum viri cel. SMITHIVS & KAESTNERVS.

§. 796. Sit ergo oculus PF, eius axis EPF, semidiameter pupillae Pp. Obiecti semidiameter Gg axi normaliter insistat, ipsumque obiectum interposita lente AB distincte videatur. EP sit distantia ea, ad quam oculus non armatus distincte videt. Ducatur recta Ep, lentem in D transiens, atque erit GDE via radii extremi, qui pupillam ingrediatur, ut omne lumen e puncto G in oculum incurrens contineatur intra conum, cuius axis GC, semidiameter baseos = CD. Fig. 72.

§. 797. Facile vero patet hunc conum ob refractionem mutatum iri, atque ita in oculum incidere radios, quibus ille constat, quasi emanarent e puncto E, atque conum coefficerent, cuius axis EP, semilatitudo baseos Pp.

§. 798. Per centrum pupillae P agatur recta PBe, rectam Ee ad axin normalem decussans, puncta e, C nectantur recta egC, eritque gBP via luminis e puncto obiecti g in oculum irruentis, atque obiectum Gg per lentem eodem modo videtur, ac si remota lente volumine auctum esset in Ee.

§. 799. Breuitatis ergo ponemus esse Ee obiecti Gg imaginem, patetque singulas eius partes auctas esse in ratione rectae GC ad rectam EC. Concipiamus iam in G spatiolum infinite paruum cuius area sit $= 1$, erit area imaginis istius spatioli in $E = EC^2 : GC^2$. At vero quantitas radiorum in spatium circulare lentis, cuius diameter $= 1$, incidentium erit reciproce ut quadrata rectarum GC, EC, directe vero ut areae spatiolorum G,E. Quae cum sint directe ut ista quadrata, patet has rationes sese mutuo destruere. Ut adeo eadem radiorum quantitas in spatium CD incidat, siue ista e spatiolo $G = 1$, siue ex eius imagine $E = EC^2 : GC^2$ emanet. Cumque porro quantitas haec in utroque casu pupillam oculi P ingrediatur, sequens hinc elicitur

THEOREMA XL.

§. 800. *Eadem est claritas obiecti* Gg *per lentem* AB *visae, quae foret claritas eius directe visae, si esset in* EC.

DEMONSTRATIO.

Etenim quantitas radiorum e spatiolo G eiusque imagine E per pupillam in retinam oculi incidens est eadem, & utraque in idem retinae

tinae ſpatium incidit, cum ope lentis non ipſum obiectum verum eius imago videatur. Sed habetur claritas vel illuminatio retinae, ſi quantitas radiorum per aream, in quam ibidem coincidunt, diuidatur. Cum vero in utroque caſu utraque ſit eadem, conſtat propoſitum.

Aliter

Sit ſemidiameter ſpatioli $G = 1$, imaginis $= r$, quantitas radiorum in circulum CD incidentium e puncto $G = g$, e puncto $E = Q$, erit ob utrumque ſpatidum infinite paruum (§. 222.)

$$q = \pi\pi . CD^2 : GD^2$$

$$Q = \pi\pi r^2 . CD^2 : ED^2 .$$

$$1 : r = GD : ED$$

adeoque erit

$$Q = \frac{\pi\pi . CD^2}{GD^2} = q.$$

Eadem ergo quantitas radiorum in utroque caſu in idem ſpatiolum retinae incidit. Unde eadem quoque erit illuminatio eademque claritas viſa.

§. 801. Alteram hanc adiunximus demonſtrationem, quo apertius pateret, quatenus extendi hoc theorema abſque notabili errore poſſit. Poſuimus vero

$$1 : r = GD : ED$$

cum deberet eſſe

$$1 : r = GC : EC$$

Patet ergo hanc poſitionem a vero parum fore aberraturam, quoties CD ratione diſtantiae GC fuerit paruitatis contemnendae, ut ponere liceat $GC = GD$, $EC = ED$. Quod vero ſemper obtinebit, niſi lens AB fuerit ſegmen-

tum sphaerulae minutissimae. Ceteris casibus a vero vel nihil aberrabit, neque opus erit, ut obiectum ponatur in F, cum, quod supra vidimus, eius claritas visa sit constans. Praestat tamen istud esse intra limites visionis distinctae.

§. 802. In hoc computo iterum neglexi-mus quantitatem luminis dispersi & reflexi, qua lumen in lentem incidens atque per eam refractum minuitur, quamque supra, si lens adhibeatur mediocriter pellucida sextam fere partem luminis incidentis esse vidimus. Ceterum theorematis veritas experientia quotidiana constat.

§. 803. Etsi vero eadem prodeat claritas visa, siue obiectum per lentem videatur, siue nudo oculo id intuearis, dantur tamen casu quibus aliam ob caussam notabilis interest differentia. Etenim apertura pupillae non modo pendet a claritate obiecti verum & ab eius magnitudine adparente. Ponamus ergo Gg esse flammam candelae, eamque noctu per lentem AB ita intueatur oculus, ut magnitudo adparens notabiliter augeatur, eadem quidem erit imaginis claritas, at cum haec maior adpareat quam ipsa flamma directe visa, consequens est, coarctatum iri pupillam, quo ipso claritas visa imaginis minuitur, etsi manente apertura pupillae claritati luminis directe visi fuisset aequalis.

Fig. 73. §. 804 Sit PQ oculus, GPQ eius axis, interpositis duabus lentibus bc, BC intueatur obiectum Gg, atque quaerenda sit eius claritas

tas adparens, Sit DP distantia, ad quam oculus obiecta distincte videt, Pp aperturae pupilla semidiameter, Ff imago obiecti, GBFbp sit via radii e puncto G, quod in axe est in extremitatem pupillae incidentis, debebit CB esse apertura lentis obiectiuae, bc apertura lentis ocularis, si omnes radii, qui hoc modo refracti pupillam ingredi possunt, reipsa ingredi debeant, atque etiamsi utraque maior esset, haud tamen plures radii pupillam transirent. Secus est si alterutra apertura minor fuerit, tunc enim Pp non erit tota pupillae apertura, verummodo pars ea, quam radii e puncto G in oculum irruentes replent. Cuinam ergo aperturae quidquam detrahatur ex principiis dioptricis in dato quouis casu facile determinabitur. Nobis vero hic radius GBFbp erit extremus eorum qui e puncto G, quod in axe est in retinam pertingunt.

§. 805. Ut iam definiatur claritas centralis, sit Gg semidiameter spatioli infinite parui, ducta gCf erit Ff eius imago, radius gf in γ incidens, ibique refractus pergit in P, ibique denuo refractus in punctum retinae q incidit. Producta recta γP in r, erit proxime qQ $=$ $\frac{2}{3}$Qr siue facta QK $-$ $\frac{2}{3}$Q P, ductaque Kq erit haec ipsi Pr parallela, ut adeo Qq sit obiecti Gg imago in retina depicta. Denique demissa normali Dd, productaque Pg in d, erit d punctum in recta cf eousque producta.

§. 806. Omissa iterum quantitate luminis ab oculo & lentibus reflexi & dispersi, assumemus omne lumen e spatio Gg in aperturam CB incidens, incidere quoque in eius imaginem

ginem Qq. Unde dabitur huius imaginis claritas, si quantitas ista per spatium Qq diuidatur. Dicta ergo quantitate ista $= q$, erit (§. 222.)

$$q = \frac{\pi\pi.Gg^2.CB^2}{GB^2}$$

At vero area spatii Qq est $= \pi.\ Qq^2$, quare posita claritate in $Q = \eta$, erit

$$\eta = \frac{\pi.Gg^2.CB^2}{GB^2.Qq^2}$$

§. 807. Vocetur angulus $CGB = \varphi$ erit $GB = GC.\sec\varphi$. estque porro

$$gG:GC = Ff:CF$$

Quare erit

$$\frac{gG}{GB} = \frac{gG}{GC.\sec\varphi} = \frac{Ff}{CF.\sec\varphi}$$

quo valore substituto prodit

$$\eta = \frac{\pi.Ff^2.CB^2}{CF.^2.\sec.\varphi.Qq^2}$$

§. 808. Dicatur porro angulus

$$GCg = FCf = \omega$$
$$CP\gamma = rPQ = \upsilon$$

erit

$$Ff:CF = \text{tang}\,\omega$$
$$Qq:QK = \text{tang}\,\upsilon$$

adeoque substitutione facta

$$\eta = \frac{\pi.\text{tang}\,\omega^2.CB^2}{\sec\varphi^2.\text{tang}\,\upsilon^2.QK^2}$$

§. 809. Claritas obiecti Gg nudo oculo visa sit $= c$, erit (§.793.)

$$c = \frac{\pi.Pp^2}{QK^2}$$

unde

unde

$$1:QK^2 = \frac{c}{\pi . Pp^2}$$

Quare iterum substituendo habetur

$$\eta = \frac{c . \tang \omega^2 . CB^2}{\sec \phi^2 . \tang \upsilon^2 . Pp^2}$$

§ 810. Est porro

$$Dd = PD . \tang \upsilon = Ff . Dc : Fc$$

unde

$$\tang \upsilon = Ff . cD : DP . Fc$$

sed

$$\tang \omega = Ff : CF$$

Quare

$$\tang \omega : \tang \upsilon = DP . Fc : CF . cD$$

Unde

$$\eta = \frac{c . CB^2 . DP^2 Fc^2}{\sec \phi^2 . Pp^2 . Dc^2 CF^2}$$

At vero est

$$DP : Pp = Dc : cb$$

&

$$bc : Cb = Fc : CF$$

adeoque substitutione facta tandem prodit

$$\eta = c \cos \phi^2 .$$

Hinc liquet

THEOREMA XLI.

§. 811. *Si apertura pupillae fuerit ea, quae debetur radio extremo* GBFbp, *claritas obiecti directe visa erit ad eiusdem claritatem per utramque lentem visam ut quadratum sinus totius ad quadratum cosinus anguli* BGC.

§. 812. *Utraque ergo erit aequalis, si obiectum fuerit velut infinite remotum.* At vel maxime notandum est, aperturam pupillae nobis hic breuita-

uitatis ergo esse spatium eius circulare, cuius semidiametrum Pp abscindit radius extremus GBFbp. Hoc vero spatium quandoque verae eius aperturae posse esse aequale supra vidimus, at nunquam maius esse potest.

§. 813. Cum claritas per hoc pupillae spatium directe visa sit (§. 809.)

$$c = \frac{\pi . Pp^2}{QK^2}$$

erit substitutione facta

$$\eta = \frac{\pi . Pp^2}{\sec\varphi^2 . QK^2}$$

§. 814. Est vero spatium istud circulare Pp basis coni luminosi qui eos radios complectitur, qui e puncto G in retinam incidunt, cuiusque figura ob refractionem ita mutatur, ut iam eius apex sit in D. Porro si obiectum fuerit velut infinite remotum, erit $\sec\varphi = 1$. quare

THEOREMA XLII.

§. 815. *Illuminatio retinae Q est ad illuminationem absolutam ut area baseos coni* DPp *ad aream circuli semidiametro* QK *descripti, si nempe obiectum sit infinite remotum, sin minus, illuminatio retinae insuper minuenda erit in ratione duplicata cosinus anguli* BGC.

§. 816. Sit iam aperturae pupillae semidiameter vera $= p$. claritas obiecti nudo oculo visa $= C$, erit (§. 793.)

$$C = \frac{\pi . p^2}{QK^2}$$

ad-

adeoque

$$C:\eta = p^2 : Pp^2 . \text{cosin}\,\phi^2$$

Hinc liquet

THEOREMA XLIII.

§. 817. *Claritas obiecti directe visa est ad eam, quae per utramque lentem videtur, ut factum ex quadrato sinus totius in aream pupillae ad factum ex quadrato cosinus anguli* BGC *in aream baseos coni* PDp.

§. 818. Si Cc fuerit tubus astronomicus, basis coni PDp longe minor est area pupillae, cum noctu lunam intuemur. Unde adeo etsi ob magnitudinem lunae adparentem vehementer auctam pupilla coarctetur, rarius tamen ita coarctabitur, ut obliquitas radii extremi GBFbp non ab apertura lentis obiectivae sed ab ipsa pupillae apertura pendeat.

§. 819. Et in his animum abstraximus ab ea radiorum quantitate, quae a superficiebus lentium & oculi reflectitur & dispergitur, cum per ea, quae supra demonstrata sunt (P. II. C. III. & IV.) haud difficulter in calculum induci possit. Ceterum vel me tacente patescit, quantitatis eius, quae a superficiebus humorum oculi reflectitur tunc tantum rationem esse habendam, cum quaeritur illuminatio retinae cum illuminatione absoluta comparanda. Quodsi vero claritates visae inter se comparandae sint, a quantitate ista abstrahere licet, cum singulae eodem modo minuantur.

§. 820. Cum claritas visa a magnitudine imaginis Ff non pendeat, facile patet, eadem theo-

theoremata valere, si plures interponantur lentes vel ſpecula. Hiſce ergo iam, utpote a cel. SMITHIO & KAESTNERO uberius pertractatis, coronidem imponemus.

CAPVT II.

Experimentis & calculo exploratur ratio, quam inter ſe ſeruant apertura pupillae & claritas luminis eiuſque magnitudo adparens.

§. 821. Aperturam pupillae ad uniuerſalem quandam menſuram reuocare, eiuſque ad luminis magnitudinem atque intenſitatem rationem atque habitum ita calculo perluſtrare, ut theoria inde extruenda omnibus numeris ſit abſoluta, vel ideo nondum licet, quod vera proceſſuum ciliarium cauſſa vel maxime eſt dubia, atque ſolertiſſimis anatomicorum perſcrutationibus etiamnum ſeſe ſubducit. Hoc ergo modo rem iſtam delibare conſtitutum eſt, ut ea praemittantur, quae vel experientiae communes vel experimenta data opera eundem in finem inſtituta docuerunt, atque porro ex his deducantur poſitiones a vero tantum non notabiliter aberrantes. Hac enim ratione vel inchoaſſe ſufficiet, cum detur frui iis, quae proxime vera ſunt, donec olim ipſa veritas in apricum ſit proditura.

§. 822. Primo igitur conſtat vel ſimplici oculorum intuitu, figuram iridis in genere, pupillae vero in hominibus plurimiſque animali-

malibus esse circularem. Quare cum ex superioribus constet, claritatem imaginis in retina oculi depictae in eadem ratione crescere, in qua crescit pupillae apertura, patet hoc incrementum per quadrata diametrorum efferri posse eorumque sequi rationem.

§. 823. Porro obseruationibus constat, pupillam, cum in eam irruit lumen intensissimum veluti solare, adeo contrahi ut instar puncti haberi possit. Contra ea in tenebris densissimis apertura ad totam fere iridis aream excrescit. Ut adeo pro lumine infinito diameter pupillae statui possit $= 0$, in tenebris absolutis haud ego ambigerem eam diametro irridis ponere aequalem, concedendum certe erit quoddam spatium, quod & tunc, quum maxima est pupillae apertura, non excedet.

§. 824. Dandum quoque id est consuetudini, ut pupilla statum quendam, quem medium vocare licebit, affectet, atque ab utroque extremo, de quo iam praefati sumus, veluti abhorreat. Cum enim rarissime lumen solare intueamur, immo ob dolorem, quem inde patitur oculus, hunc ilico iterum auertamus, hinc fit, ut fibrillae, a quibus ad maiorem contractionem sollicitatur iris, paullatim veluti durescant, minusque contractioni isti adsuefiant.

§. 825. Neque minus est euidens, pupillae aperturam non modo pendere a claritate imaginis in oculo, verum & ab eius magnitudine. Ut adeo si claritas obiecti fuerit eadem, eo magis contrahatur pupilla, quo maior fuerit obiecti imago in retina depicta. Contra ea, si

ſi magnitudo imaginis duorum obiectorum eadem fuerit, illud pupillae aperturam reddet contractiorem, quod clarius fuerit.

§. 826. Duo porro ſunt, quae deprehendere mihi viſus ſum. Primo enim ab eodem obiecto luminoſo longe magis contrahi pupillam vidi, ſi iſtud in ipſo axe oculi fuerit ſitum, quam cum extra axin iſtum fuerit. Rationem phaenomeni pro eo caſu, quo radii valde oblique in oculum incidunt, facile vel inde petenda eſt, quod minori copia incidant, maiori vero reflectantur. At haec tunc tantum obtinent atque notabiliora euadunt, ubi declinatio radiorum ab axe ad 20 vel plures gradus excurrit. At vero iam notabilem inueni differentiam, cum vix 5 aut 6 graduum erat iſta declinatio. Eam itaque inter proceſſus ciliares & viſionem diſtinctam eſſe pono analogiam ut minores ſint, ubi obiectum vel minime ab axe oculi diſtat.

§. 827. Alterum, quod obſeruaſſe mihi viſus ſum hoc eſt, ut magis amplietur pupilla, ubi ad videndum obiectum oculi acies intenditur. Hoc vero iterum fit, ut eas tantum motus perſentiamus, quibus eae fibrillae, quae in axe oculi ſunt, ſollicitantur, haud ſecus ac ſi omnes earum vires veluti in punctum contraherentur, ibique coniunctae ſeſe exſererent, ubi axis oculi retinam tranſit.

§. 928. Variae hae circumſtantiae, conſuetudo ceteraeque cauſſae minus notae aperturam pupillae in variis ſubiectis reddunt variam, ut vix generale quicquam ſtatuere liceat. Quodſi ergo in ſequentibus ſpecialiora occur-

occurrant, haud ea omnia singulis quibusuis oculis erunt adplicabilia, methodo vero quam describam, quaque ista peruestigaui, tutius quilibet utetur, cui de suis oculis periculum facere volupe fuerit.

§. 829. Contractionem pupillae non ab eo lumine pendere quod in ipsam iridem incidit, verum vel maxime ab eo, quod per pupillam ad ipsam retinam pertingit, hoc modo euinci posse inueni.

EXPERIMENTVM XXXII.

§. 830. Sumta eadem lente, quam in experimento XXVI & seqq. adhibui, quaeque sit AB, hanc ita inter flammam candelae L & oculum PO collocaui, ut distantia LA triplam fere eius distantiam focalem excederet oculusque esset in ipsa imagine quod interposito speculo in E facile videre poteram. Quo facto dedi operam ut imago apicis flammae sese in ipsa iride depingeret, nullumque lumen incideret in pupillam, Post in speculo utriusque oculi imaginem intuens, vidi utramque pupillam aeque esse ad sensum apertam. At vero situ lentis vel oculi ita imutato ut vel minima pars imaginis flammae in pupillam incideret, hanc momento citius contractam vidi, atque vel triplo minor euasit, cum tota imago in eam incidebat. Experimenti pluries iterati idem fuit euentus Fig.74.

§. 831. Experimento hoc patere videtur, *unicam certe praecipuam processum ciliarium caussam in fundo retinae quaerendam esse, ut adeo pupillae contractio non ab ea obiecti claritate immediate pendeat,*

quae vera est, verummodo ab ea qua gaudet eius imago in retina depicta. Haec vero cum vice versa pendeat ab ipsa pupillae apertura, patet *dependentiam istam esse mutuam.*

§. 832. Hinc facile stabilientur positiones sequentes. *Manente imaginis magnitudine apertura pupillae erit ut functio claritatis qua gaudet.* Eadem enim fibrillae a lumine feriuntur. Quare cum quaelibet eo magis ad motum cieatur, quo intensius fuerit lumen in eas incidens quoque adeo clarior fuerit imago, constat propositum.

§. 833. Adfluxus luminis in oculum continuus est, adeoque continuo a luminis radiis feriuntur fibrillae in retina. Oportet ergo motus hinc enascens ulterius propagetur, atque concipienda erit quaedam eius cumulatio, qua fit ut fibrillae istae non modo a singulis luminis pulsibus tendantur, verum & in motu tremulo, vel quicunque tandem hic fuerit, aliquandiu perseuerent. Quod vel experientia quotidiana apertissime demonstrat. Sic enim solem intuentes citissime iterum oculis auersis eius imaginem variis coloribus tinctam cernunt. Sic quoque filum vel baculum citissime circa axin vel centrum, rotatum totam circuli ab eo descripti aream spectabilem sistit. Huc quoque referas experimentum a Cel. KAESTNERO in praeclaro optices systemate pag. 410. descriptum, quo eiusmodi motum gyratorium cumque velocissimum ad exhibendas colorum miscelas adhibet. Idem quoque deprehendas noctu si ipse oculus flammam candelae intuens

intuens velocissime auertatur, flammam enim veluti caudatam videbit, etsi velocissime tinue istud caudae lumen euanescat.

§. 834. Huic cumulationi motus tremuli magna ex parte tribuenda est successiua pupillae variatio. Aucta enim luminis claritate successiue tantum motus iste cumulatur & ad statum permanentiae pertingit, eodemque modo imminuto lumine successiue iterum amittitur cumulatio ista, quae iam nimia est. Ex his vero iam per se elucescit, nequaquam simplicem esse functionem istam claritatis imaginis, qua apertura pupillae est exprimenda. Unde eam in sequentibus per adplicatas cuiusdam curuae exhibebimus.

THEOREMA XLIV.

§. 835. *Si ad lumen constantis claritatis accedamus vel ab eo recedamus, apertura pupillae constanter proportionalis est intensitati luminis fibrillas retinae ferientis.*

DEMONSTRATIO.

Etenim ob claritatem luminis constantem, constans quoque est illuminatio absoluta, quare vi theorematis XXXIX. (§. 793.) illuminatio imaginis simpliciter erit in ratione aperturae pupillae. Unde cum vice versa haec sit ut illuminatio, erit ea quoque ut intensitas luminis fibrillas retinae ferientis, quippe haec cum illuminatione coincidit.

THEOREMA XLV.

§. 836. *Si a lumine vel obiecto constantis claritatis continuo recedamus, continuo augetur eius claritas adparens. Accedendo vero ad lumen istud, eius claritas adparens minuetur.*

DEMONSTRATIO.

Etenim a lumine recedendo ampliatur pupilla, adeoque per theorema praecedens augebitur imaginis claritas, adeoque & obiecti vel luminis claritas adparens. Contrarium locum habere, cum ad lumen accedimus vel per se patet.

THEOREMA XLVI.

§. 837. *Tota vis luminis in oculum irruentis est factum ex area imaginis in aream pupillae ducta, si idem intueamur lumen.*

DEMONSTRATIO.

Vis luminis quamlibet fibrillam ferientis est ut apertura pupillae, quare habebitur eius summa, si apertura ista per aream imaginis multiplicetur.

§ 838. Duo tamen sunt, quae circa haec theoremata notanda veniunt. Primo enim a veritate aliquantum recedent, ubi luminis magnitudo adparens tanta fuerit, ut eius imago retinam magna ex parte repleat. Hoc enim casu lumen obliquius incidens minus est intensum, quare summa virium calculo differentiali erit peruestiganda.

§. 839. Alterum, quod concinnitatem horum theorematum turbat, obtinebit, cum magnitu-

gnitudo luminis admodum fuerit parua, neque eius imago fuerit in ipsa retina. Quo casu visio non est distincta, cum radii qui in punctum coincidere deberent iam in circellum incidant. Quare de hoc casu eadem notanda sunt, quae supra de lumine per lentem causticam refracto atque extra focum plano albo excepto demonstrauimus (§. 538. seqq.) Hic vero breuitatis ergo ab utroque hoc casu animum abstrahemus, atque ponemus imaginem esse eam, quae spatium retinae repleat inter utrumque istud extremum veluti medium.

THEOREMA XLVII.

§. 840. *A lumine duplo, triplo &c. n tuplo non potest pupilla ita contrahi ut eius apertura prioris parti dimidiae, tertiae &c. n tae euadat aequalis, verum his partibus maior erit.*

DEMONSTRATIO.

Prius enim sit esset, claritas imaginis foret constans, cum haec constanter sit ut factum ex claritate obiecti in aperturam pupillae. Posita ergo illa $= n$, hac $= \frac{1}{n}$, foret $n \cdot \frac{1}{n} = 1$. Quare cum contractio pupillae pendeat a claritate imaginis, consequens est hanc augeri, aucta claritate obiecti, ut adeo posita hac claritate $= n$, apertura pupillae debeat esse $> \frac{1}{n}$.

§. 841. Obtinet hoc theorema siue claritas siue magnitudo adparens luminis siue factum ex utraque n tuplicetur, atque vel inde

quoque euidens est, quod $\frac{1}{n}$ aream iridis nunquam excedere possit.

§. 842. Quaelibet fibrilla in retina oculi seorsim est spectanda, cum verosimile sit, quamlibet independenter a ceteris ad contractionem pupillae concurrere. Etsi enim concedamus motum istum tremulum & cum ceteris adiacentibus communicari, hoc tamen positioni isti nil detrahit. Quantum enim cum iis communicatur tantum ipsi decedit, ceteris accedit, quare contractio nilominus erit ut summa motus hac ratione inter plures distributi. Id ergo, quod a qualibet fibrilla proficiscitur contractionis augmentum necessario est ut functio caussae, adeoque ut functio luminis eam ferientis. Huius vero intensitatem vidimus esse ut factum ex claritate obiecti & area pupillae.

§. 843. Porro etsi fibrillae axi oculi viciniores vel a natura vel a consuetudine sensibiliores sint, atque intendatur earum vis pupillam contrahens, cum intenditur oculi acies, praeteraeque constet & ipsos animi adfectus pupillam ampliare vel contrahere posse, ut adeo difficillime quicquam definiatur, quod uniuersale sit: sequentia tamen assumemus a vero haud ita multum aberrantia.

Fig. 72. §. 844. Primo enim fibrillas axi oculi vel fundo retinae F viciniores eadem vi contrahenti gaudere ponemus, ut eadem fere gaudent sensibilitate. Consuetudini deberi hanc maiorem sensibilitatem vel inde constare puto, quod in oculo limo non eae fibrillae quae in F sunt

ſunt verum aliae à fundo retinae F remotiores ſenſibilitate iſta gaudent.

§. 845. Porro qualeſcunque ſint iſtae vires pupillam contrahentes, eas veluti in poteſtate eſſe vel inde patet, quod dum oculus obiectum enixius intuetur, veluti in F concentrentur, quo maior euadat oculi acies. Mutabile ergo eſſe videtur ſpatium ſenſibilitatis maioriſque vis contrahentis. Sit eius ſemilatitudo Ff, haec utique augebitur, ubi mere paſſiue ſe habet oculus, quod ergo in ſumendis experimentis probe erit obſeruandum.

§. 846. Cum ergo aſſumi abſque notabili errore poſſit, dari quoddam ſpatium, in quo ſingulae fibrillae, cum ab eodem lumine in motum cientur, aequale contractionis augmentum producant, facile patet, ſi imago ſpatio iſto haud fuerit maior, pupillae contractionem efferri poſſe per ſummam augmentorum iſtorum aequalium, adeoque functionem, de qua ſupra praefati ſumus (§. 842.) per aream imaginis eſſe multiplicandam, quo tota eruatur pupillae contractio.

§. 847. His ita praeſtructis dicatur apertura pupillae, cum maxima eſt $= a$, atque erit a vel exacte vel proxime areae totius iridis aequalis. Intueatur iam oculus lumen vel obiectum quoddam, atque fiat

huius obiecti claritas $= x$
area imaginis in retina $= \eta$
area pupillae reſpondens $= x$
claritas imaginis $= y$

 atque

atque erit $y = \varkappa x$, contractio pupillae $= a - x$, quae erit summa singularum contractionum partialium.

Fig. 75. §. 848. Quaeuis vero contractio partialis ita reperitur. Vidimus eam esse functionem intensitatis luminis fibrillas ferientis, quam diximus $= y$. Cum vero functio ista adhuc dum lateat, ponamus curuam AMN esse talem, ut si abscissa AP sit $= y$, adplicata PM functionem istam siue contractionem cuilibet fibrillae debitam exhibeat. Sit area fibrillae $= d\eta$, erit contractio respondens $= -dx$, atque proinde

$$-dx = PM.d\eta$$

Quare

$$a - x = \eta.PM.$$

§. 849. At vero est

$$AP = y = \varkappa x,$$

quare

$$x = \frac{AP}{\varkappa}$$

unde porro facta substitutione

$$a - \frac{AP}{\varkappa} = \eta.MP$$

§. 850. Assumta iam abscissa AQ $= a\varkappa$, erit

$$a = AQ : \varkappa$$

adeoque

$$\frac{AQ - AP}{\varkappa} = \eta.PM.$$

unde fit

$$\frac{PQ}{PM} = \eta\varkappa = \text{cotang. MQP}.$$

Quodsi

Quodsi erga constructa sit curua, haud difficulter dabitur pupillae apertura datae obiecti claritati dataeque eiusdem magnitudini adparenti respondens. Facta enim $AQ = ax$, angulus MQA sumatur talis, ut eius cotangens sit $= nx$, ductaque QM ex M demittatur MP atque erit pupillae area $x = AP:x$.

§. 851. Hinc corollarii loco esto: Si claritas obiecti x fuerit constans erit AQ constans, cum sit $= ax$, quare pro quauis area imaginis n dabuntur anguli MQA, quorum cotangentes $= nx$, adeoque & aperturae pupillae respondentes $x = AP:x$. Ut iam hunc casum experimento definiamus, sequens praestruemus

LEMMA I.

§. 852. *Si oculus AB semetipsum intueatur in speculo CD, erit diameter pupillae pq in superficie speculi circino capta dimidia pars diametri verae AB siue semidiametro verae aequalis.* Fig. 76.

DEMONSTRATIO.

Etenim distantia imaginis Pp eadem est quae distantia ipsius oculi Ap, unde fit $AP:Ap = 2:1$. Porro est $PQ = AB$, quare erit $pq = \frac{1}{2}PQ = \frac{1}{2}AB$.

EXPERIMENTVM XXXIII.

§. 853. In camera probe clausa probeque obscurata unicum in fenestra apertum reliqui foramen circulare, cuius diameter $= 0,302$ unius pedis, per quod incideret lumen caeli maxime ludi ab ea parte quae a sole erat auersa. Quo facto a fenestra recessi, sumtoque speculo Fig. 77.

lo pq, lumen caeli per foramen DE intuens expectaui, usque dum acquireret pupilla aperturam huic lumini debitam. Parato porro circino in superficie speculi cepi aperturae istius diametrum. Dedi vero operam ut citissime mensura haec caperetur, atque ea capta, postmodum ita verificaretur, ut experimento eodem modo instaurato viderem, an sibi constaret nec ne. Experimentum eadem manente distantia pluries iteraui, atque ex cunctis ita medium sumsi, ut tertiam fere eorum partem reiicerem, quae pupillae aperturam exhiberent maiorem ea, quae ex ceteris prodibat. Metuendum enim erat, ne iterum ampliaretur pupilla duplicem ob caussam, quippe imago oculi in speculo erat obscurior, atque ad capiendum mensuram semidiametri pq intendebatur eius acies. His usus cautelis distantiam AC ita immutaui, ut successiue esset 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 pedd. atque experimentum eodem modo iteraui. Tandem ut haberem foraminis DCE semidiametrum adparentem, eius semidiametro vera DC=0,151 per distantiam AC diuisa elicui angulorum DAC tangentes atque proinde ipsos angulos. Semidiametros pq cepi in lineis digiti parisini, earumque partibus decimalibus. Unde tandem sequens nata est tabella.

Distant.

Distant. AC	angulus DAC	Diam. pupillae AB obseru.	Diam. AB correcta.
pedd.	° ′	lin.	lin.
1	8 - 36	1,14	1,13
2	4 - 20	1,50	1,44
3	2 - 53	1,70	1,70
4	2 - 10	1,89	1,93
5	1 - 44	2,08	2,15
6	1 - 26½	2,31	2,36
7	1 - 14	2,53	2,56
8	1 - 5	2,78	2,75
9	0 - 58	2,89	2,93
10	0 - 52	3,15	3,10

Diametrum totius iridis inueni $= 4,70$. Correctas vero pupillae diametros eodem modo quaesiui, quo supra (§. 396. seqq.) aberrationes obseruationum haud euitabiles ad legem quandam magis homogeneam reduci posse ostendimus.

§. 854. Cum in his experimentis figura pupillae, imaginis & iridis sit circularis, atque diameter imaginis poni possit in ratione constanti diametri obiecti adparentis, singularum areas simpliciter per quadrata diametrorum exprimemus, cum hic tantummodo ratio inter areas pupillae & imaginis sibi respondentis quaeratur. Quare ponendo $a = (4,70)^2$, ex tabella praecedente concinnatur sequens, in qua diametros pupillae adhibui correctas.

Fig. 75.

Dist.	x	n	$a-x$	PM
1	12,769	2663,56	2071,31	0,777
2	20,736	676,00	2001,64	2,961
3	28,900	299,29	1920,00	6,414
4	37,249	169,00	1836,51	10,866
5	46,225	108,16	1746,75	16,150
6	55,696	74,82	1652,04	22,080
7	65,536	54,74	1553,64	28,371
8	75,625	42,25	1452,75	34,384
9	85,849	33,64	1350,51	40,146
10	96,100	27,04	1248,00	46,154

Cum enim hoc casu claritas obiecti $\varkappa$ sit constans, eam ponemus $=1$, unde erit $AQ=a$ $=2209,00$, $AP=x$, $PQ=a-x$, adeoque $PM=PQ:n$ (§. 850.) *Ut adeo hoc modo detur ratio inter intensitatem luminis retinam ferientis & contractionem cuilibet fibrillae ab ipso percussae vel spatiolo retinae debitam.* Est enim contractio $=PM$, & ob $\varkappa=1$, intensitas luminis $y=x\varkappa$ euadit $y=x$.

Fig. 78. §. 855. Ut vero numeri huius tabellae ad certas definitasque unitates reuocentur, ponenda

claritas caeli sudi AQ		$=1$
area iridis - - -	a	$=1$
area pupillae - - -		$=x$
claritas alia quaelibet Aq		$=\varkappa$
semid. obiecti adparens		$=s$

Unde erit area imaginis $n=m(\sin s)^2$

Quodsi iam curuae AMN abscissae AP sint $=y=x\varkappa$, adplicatae respondentes PM exhibeant contractionem cuilibet fribillae vel spatiolo

tiolo retinae debitam, erit PM=$n(1-x):n$ adeoque breuius

$$PM=\frac{(1-x)\mu}{\sin s^2}$$

&

$$x=\frac{AP}{Aq}$$

unde

$$PM=\frac{Pq.\mu}{Aq.\sin s^2}$$

hinc porro

$$\frac{\mu}{\sin s^2}=\mu.\operatorname{cosec} s^2=\frac{Aq.PM}{Pq}=Ap.$$

§. 856. Coefficiens μ per unicam obseruationem & per assumtam scalam pro construenda curua AMN determinatur. Quo facto rectae Ap adscribi poterunt semidiametri obiecti adparentes, atque singuli casus, qui occurrere possunt facili constructione resolventur.

§. 857. *Sit v. gr. semidiameter Ap=60', claritas obiecti =Aq, ducta pMq, atque demissa ex M normali MP, erit apertura pupillae =AP : Aq.* Curuam, qualem eam sistit fig. LXXVIII, hac ratione construxi, atque rectae Ap scalam semidiametrorum obiecti adscripsi, quatenus ea per tabellam praecedentem extendere licuit. Jam vero hanc tabellam ad praefinitas unitates reuocatam hic exhibebo.

Dist.

Dist. obiecti	Apertura pupillae x	Obiecti semid. adparens s	Area imaginis $= \eta$ $\pi \sin s^2$	PM = $(1-x)$:
1	0,0578	8° - 36′	0,07025	13,43
2	0,0938	4 - 20	0,01794	50,51
3	0,1308	2 - 53	0,007954	112,96
4	0,1686	2 - 10	0,004492	193,52
5	0,2092	1 - 44	0,002875	289,17
6	0,2525	1 - $26\frac{1}{2}$	0,002011	393,10
7	0,2962	1 - 14	0,001456	513,52
8	0,3423	1 - 5	0,001123	626,81
9	0,3886	0 - 58	0,0008942	735,50
10	0,4350	0 - 52	0,0007188	850,58

§. 858. Curuae AM ordinatae initio crescunt ut quadrata abscissarum, post vero simpliciter ut abscissae, atque tandem in minori ratione, quod vel ex figura patet. Denotant vero abscissae AP$=y=xx$ claritatem imaginis siue vim luminis retinam ferientis, & ordinatae PM respondentes contractionem cuiuis fibrillae vel dato cuiuis spatiolo retinae debitam, ut adeo hinc manifestum fiat, rationem inter utramque non esse simplicem. Etsi vero curua per experimentum praecedens tota construi atque absolui non possit, plura tamen ipsius symptomata in antecessum definire licet. Quem in finem sequentia notabimus.

§. 859. *Scala Ap, cui adscriptae sunt diametri obiecti adparentes in infinitum excurrit, & eousque extendi poterit, dato tantummodo unico puncto curuae M.*

Vidi-

Vidimus enim esse (§. 855.)

$$\mu.\text{cosec}\, s^2 = \frac{Aq.PM}{Pq} = Ap$$

Sit iam semidiameter *s* infinite parua, erit

$$Ap = \mu.\text{cosec}.s^2 = \infty$$

Porro datis Aq, Pq, PM, s per unicum experimentum dabitur coefficiens μ, ceteris casibus omnibus inseruiens.

§. 860. *Similiter etsi curua ultra punctum N non sit producta, dabuntur tamen aperturae pupillae pro singulis claritatibus obiecti, simulac eius semidiameter adparens non fuerit* $< 69'$. Est enim Aq claritas obiecti, quae ergo si ponatur infinita, recta qN euadet axi Aq parallela eritque NR. At vero in R abscindit 69', quae ergo est obiecti semidiameter minima, qua obtinente apertura pupillae pro quauis obiecti claritate definiri poterit. Quodsi vero assumatur semidiameter minor, claritas obiecti maxima, cui pars curuae AMN satisfaciet finita erit.

§. 861. *Curua AN in infinitum excurrit.* Quodsi enim obiecti semidiameter adparens sit infinite parua, erit $Ap = \infty$, adeoque qp euadit ipsi Ap parallela, unde punctum curuae M puncto axis q normaliter imminet. Cum vero Aq sit claritas obiecti, haec in infinitum excurrit, quare & ipsa curua ramum habet in infinitum excurrentem.

§. 962. *Curua* AN *conuergit ad asymtoton axi AQ parallelam.* Est enim AP claritas imaginis, PM contractio cuiuis fibrillae vel spatiolo retinae debita. Quae cum in infinitum non excrescat, patet PM datam magnitudinem

non excedere. Ad hanc ergo continuo propius accedet. Quare cum curua in infinitum excurrat (§. 861.) patet eam ad aſymtoton conuergere.

§. 863. Æquationem, quae & tabellae §. 857. & ſymptomatibus eius iam definitis, proxime ſatiſfacit, hanc eſſe inueni. Vocetur PM $= z$, ob AP $= y = x$ erit proxime

$$z = \frac{vy^2}{\alpha + y^2} = \frac{vx^2}{\alpha + x^2}$$

Huius aequationis coefficientes v, α per eas obſeruationes definiui, quae diſtantiis 6, 10 in tab. §. 857. reſpondent, ita tamen ut facerem PM $= 1000$. z unde habui

$$0{,}85058 . (0{,}4350)^2 + 0{,}85058\,\alpha = (0{,}4350)^2,$$
$$0{,}39310 . (0{,}2525)^2 + 0{,}39310\,\alpha = (0{,}2525).$$

hinc

$$\alpha = 0{,}27387.$$
$$v = 2{,}08145.$$

adeoque

$$z = \frac{2{,}08145\,xx}{0{,}27383 + xx}$$

ſiue

$$z = \frac{2{,}08145 . yy}{0{,}27383 + yy}$$

Æquatio poſterior uniuerſalis eſt, quia unico tantum caſu eſt $y = x$, cum nempe eſt $x = 1$ ſiue claritati coeli ſudi aequalis.

§. 864. Sic v. gr. erit

$y = 0,1$	$z = 0,073$
$= 0,2$	$= 0,265$
$= 0,3$	$= 0,515$
$= 0,4$	$= 0,767$.
$= 0,5$	$= 0,993$.
&c.	&c.
infinit.	$= 2,081$ distantia Aſymptoti.

Notabilius ergo haec formula a vero aberrat initio, ſiue id inde ſit, quod aperturae pupillae minores minus exacte definiri poſſint, ſiue formula his caſibus reipſa a vero aberret. Dubium hoc ſoluere dabitur, ſi unquam eo perducatur theoria proceſſuum ciliarium, ut formula inde erui poſſit ea, quae veritati ex aſſe ſatiſfaciat. An experimenta hoc capite deſcripta quicquam conferre poſſint hi diſpiciant, quibus in cauſſam proceſſuum ciliarium inquirere animus eſt & vis ingenii. Ego quidem ea hic fuſius non perſcrutabo, cum nimis ſpecialia ſint quae inde conſequuntur, quam ut ſingulis oculis adplicari poſſint. (§. 828.)



PHOTOMETRIAE
PARS V.
QVA INVESTIGATVR DISPERSIO LVMINIS MEDIA DIAPHANA POTISSIMVM ATHMOSPHAERAM TELLVRIS PERAGRANTIS

CAPVT I.
Debilitatio luminis media minus diaphana potiſſimum aerem permeantis.

§. 865.

Etſi tum in ſuperioribus tum & praecipue in libro cel. BOVGVER iam ſaepius laudato plurima occurrant, quae ad determinandam debilitationem luminis in mediis diaphanis faciunt, nobis tamen hic velut ab ouo repetenda res eſt, cum ea non modo uniuerſalius ſit abſoluenda, verum & caſibus ſpecialioribus adplicanda veniat.

§. 866. Lumen diſpergi a particulis heterogeneis, quibus corpora diaphana plus minuſue ſcatent, ſupra iam paſſim notauimus (§. 320. 322. 323. 466. ſeqq.) Eas itaque ſpectare licet ceu obſtacula, quae lumen in via ſua offendit, & a quibus intercipitur. Huiuſmodi obſtacula in vitro ſunt bullulae vel veſiculae vacuae, quales & in glacie ingenti copia

pia inueniuntur. Eiusmodi quoque esse in interstitiolis aquae ceterorumque fluidorum dubio carere videtur, cum spectandas se sistant, simulac a calore aer ipsis inclusus dilatatur. Bullulis istis accedunt particulae terrenae aliaeque heterogeneae quam plurimae, quae omnes luminis progressum plus minusue impediunt, prout maiorem ipsis obiiciunt superficiem. Aerem semper maxima copia vaporum aliarumque particularum e corporibus terrenis effluentium onustum esse vel in vulgus notum est.

§. 867. Lumen in superficies istarum particularum incidens variis modis intercipitur atque dispergitur, quo fit ut non omne istud, quod inciderat, recta pergere possit. Qua ratione dispergatur in sequentibus videbimus, iam id acturi, ut dispiciamus, quaenam sit quantitas ea, quae intercipitur, cuiusque lumen recta pergens facit iacturam.

§. 868. Concipiamus eiusmodi particulam esse sphaericam, atque facile patet omne istud lumen ab ea interceptum iri, quod normaliter incideret in planum circulare cuius diameter diametro sphaerulae istius est aequalis. Etenim diuersa incidentiae obliquitas tantummodo dispersionem luminis non item quantitatem interceptam reddit variam.

§. 869. Quod iam insuper ponamus lumen particulam istam prope superficiem praetergrediens, quacunque demum ex caussa inflecti, alia quoque eius pars ita dispergitur, ut residuo, quod recta pergit, adnumerari amplius non possit.

§. 870. In utramque hanc cauſſam curatius eſſet inquirendum, ſi quaelibet particula ſeorſim eſſet ſpectanda. At vero tanta eſt figurae, magnitudinis & vis inflectentis diuerſitas quae calculum plane reſpuit. Quare eos tantum caſus perluſtrabimus, quibus lex quaedam generalior adcommodari poterit. Quem in finem ſequentia praeſtruemus.

§. 871. Primo enim utraque haec diſperſionis cauſſa ita combinabitur commodiſſime, ſi in vicem ſuperficiei particulae lumen intercipientis aſſumamus aliam maiorem, quae omne iſtud lumen quod diſpergitur intercipere valeat. Hac enim ratione lumen iſtud diſperſum uno velut actu ſegregatur ab eo, quod ad metam pertingit, cuiuſque quantitas inueſtiganda eſt.

§. 872. Porro ut in quolibet corpore diaphano mirum in modum inter ſe differunt particulae lumen intercipientes, ita eas vel aequaliter vel aequabiliter in medio pellucido diſſeminatas eſſe aſſumendum erit, alias enim ab omni calculo eſſet abſtrahendum.

§. 873. Sic v. gr. in vitro, aqua ceteriſque fluidis aeque denſis probeque permixtis aequalis diſſeminatio particularum aſſumitur, quod & pro vitro in ſuperioribus iam fecimus. (§. 466. ſeqq.) Contra ea in aere utique inaequaliter eas diſſeminatas eſſe ponendum eſt, ſimulac diuerſa athmoſphaerae ſtrata inter ſe comparentur. At ſi idem ſtratum ſpectetur, diſſeminatio iſta ponetur aequalis, atque abſque notabili errore hac hypotheſi uti

uti licebit, niſi inter ſe comparentur partes eiuſdem ſtrati admodum diſſitae.

§. 874. *Luminis intercepti quantitas eo maior eſt, quo plures in eodem ſpatiolo fuerint particulae intercipientes, quoque maior fuerit ſingularum ſuperficies*, ſpatiolum iſtud ponamus infinite paruum, atque quantitas luminis intercepta erit ut ſumma obſtaculorum ſiue ſuperficierum ipſi obiectarum; Hanc vero ſummam per ſpatiolum diuiſam vocabimus *denſitatem obſtaculorum*, atque eandem *medii diaphani impelluciditatem* denotare per ſe eſt euidens.

§. 875. Sit iam medium diaphanum CB, lumen in iſtud incidat ſecundum directionem AB, ſitque denſitas incidentis $=1$. Dum vero in P peruenit ſit denſitas reſidua $=v$, via percurſa AP $=x$, ſpatiolum Pp $=dx$, denſitas obſtaculorum in hoc ſpatiolo $=\delta$, debilitatio luminis ipſi debita $=-dv$, atque erit (§. 457.) Fig. 79.

$$-dv=v\delta.dx$$

adeoque

$$\log\left(\frac{1}{v}\right)=\int\delta dx.$$

Eſt vero $\int\delta dx$ ſumma obſtaculorum, quae lumen viam AP percurrendo offendit, unde

THEOREMA XLVIII.

§. 876. *Logarithmus luminis reſidui, dum in medio minus diaphano debilitatur, eſt in ratione ſummae obſtaculorum cunctorum, quae in via ab ipſo percurſa offendit, qualicunque demum modo obſtacula iſta in medio percurſo ſint diſſeminata & qualiſcunque ſit curuatura viae.*

DEMONSTRATIO.

Eſt enim δdx factum ex via percurſa infinite parua & denſitate obſtaculorum, quare cum habeatur obſtaculorum quantitas ſi eorum denſitas δ per ſpatiolum dx multiplicetur, erit δdx obſtaculorum quantitas in via percurſa dx, adeoque $\int\delta dx$ erit ſumma obſtaculorum in tota via percurſa x diſſeminatorum. Quae ſumma cum ſit $= \log \frac{1}{v}$, conſtat propoſitum.

THEOREMA XLIX.

§. 877. *Si particulae lumen intercipientes ſint aequaliter diſſeminatae, logarithmus debilitationis luminis erit factum ex impelluciditate medii in viam percurſam ducta.*

DEMONSTRATIO.

Etenim hoc caſu δ eſt conſtans, quare formula eruta

$$\log \frac{1}{v} = \int\delta dx$$

abit in ſequentem

$$\log \frac{1}{v} = x\delta$$

unde euidens fit propoſitum.

Fig. 80. §. 878. Sit iam AE ſuperficies telluris, C eius centrum, AB altitudo aeris lumen intercipientis, PMmp ſtratum, aeris quodlibet, lumen incidat in A ſecundum DMA, hanc eius viam hic ponemus rectilineam, cum eius curuedo admodum ſit exigua. Sit porro ſemi-

semidiameter telluris CA$=1$.
via percurrenda AM$=x$
densitas obstaculorum in M$=\delta$
densitas luminis in M$=v$

erit (§.876.)

$$\log v = \int \delta dx.$$

Porro vocetur

angulus BAD$=\gamma$
altitudo strati EM$=y$

erit

$$\cos\gamma + x = \sqrt{(\cos\gamma^2 + 2y + yy)}$$

unde

$$dx = \frac{(1+y)dy}{\sqrt{(\cos\gamma^2 + 2y + yy)}}$$

Siue ponendo breuitatis ergo $2y+yy=zz$, erit

$$dx = \frac{zdz}{\sqrt{(\cos\gamma^2 + zz)}}$$

adeoque

$$\log v = \int \frac{\delta zdz}{\sqrt{(\cos\gamma^2 + zz)}}$$

§. 879. Ponendo porro CM $=r$, erit $rr = 1 + 2y + yy = 1 + zz$ adeoque formula haec facili substitutione facta abit in sequentem

$$\log v = \int \frac{\delta z z.\sec\gamma}{\sqrt{(rr + zz\cdot\tan\gamma^2)}}$$

siue radice reipsa extracta

$$\log v = \sec\gamma \int \frac{\delta zdz}{r} - \frac{\sec\gamma.\tan\gamma^2.}{2.} \int \frac{z^3dz.\delta}{r^3} + \frac{1.3\sec\gamma.\tan\gamma^4.}{2.\ 4} \int \frac{\delta z^5dz}{r^5} - \&c.$$

§. 880 Integralia huius feriei funt functiones altitudinis ftrati EM, atque ab angulo inclinationis BAD non pendent. Quodfi ergo tantummodo quaeratur debilitatio luminis quum totam athmofphaeram fiue viam DA percurrit, fingula ifta integralia fpectari poterunt ceu coefficientes. Quare ponendo

$$\int \frac{\delta z dz}{r} = A$$

$$\int \frac{\delta z^3 dz}{r^3} = B$$

$$\int \frac{\delta z^5 dz}{r^5} = C$$

&c.

erit

$$\log\left(\frac{1}{v}\right) = A.\sec\gamma - \tfrac{1}{2}B\sec\gamma.\tang\gamma^2 + \frac{1.3}{2.4}C.\sec\gamma.\tang\gamma^4 - \frac{1.3.5.}{2.4.6.}D.\sec\gamma.\tang\gamma^6 + \&c.$$

§. 881. Series haec maxime eft conuergens. Eft enim tota altitudo aeris lumen intercipientis AB ratione ipfius femidiametri telluris AC paruitatis contemnendae, atque vix $\frac{1}{50}$ eius partem fuperabit. Quare cum fit $y < \frac{1}{50}$ erit $zz < \frac{1}{50}$. Cumque fit $r > 1$, feries magis conuergit, quam geometrica cuius exponens eft $\frac{1}{50}$. Unde nifi angulus ad 80 & plures gradus excurrat, primus feriei erutae terminus voto velut ex affe fatisfaciet, eritque log.

$$\log. \frac{1}{v} = A. \sec \gamma.$$

Quae eadem formula prodiisset, si strata aeris plana esse posuissemus.

§. 882. Coefficientes A, B, C &c. in horas mutantur, cum maxime variabilis sit aeris constitutio. Eadem quoque vaporum quantitas lumen per athmosphaeram incidens plus minusque intercipit atque dispergit, prout vel visibiles sunt veluti nubes, vel inuisibiles veluti cum caelum est sudum. Quare cum vix generale quicquam in his statui possit, methodum tamen exemplo illustrabimus, qua definiendi sunt coefficientes A, B, C, ut datis quibusuis casibus specialibus adplicari possit. Atque primo formulam simpliciorem

$$\log \frac{1}{v} = A. \sec \gamma$$

retinebimus, utpote quae angulis γ tantum non omnibus satisfacit.

§. 883. Lumen in D incidens posuimus $= 1$, eritque ergo hoc lumen solare ante eius in aerem ingressum. Cum peruenit in A debilitatur in ratione $1 : v$. At vero haec ratio experimentis directe determinari nequit. Quare sequenti modo res erit absoluenda.

§. 884. Lumen secundum directionem DA in A incidens sit $= v$, secundum directionem FA ponatur $= V$. atque variis modis experimentis definiri poterit ratio inter v & V, hanc ergo ut & angulos respondentes BAD, BAF ceu datos assumimus. Cumque sit

— log

$$-\log v = A \sec BAD$$
$$-\log V = A . \sec . BAF$$

erit

$$A = \log \frac{V}{v} : (\sec BAD - \sec BAF)$$

Ut adeo hac ratione detur coefficiens A.

§. 885. Experimenta hunc in finem instituit cel. BOVGVER atque inuenit, lumen solare in altitudine 66° esse ad idem lumen in altitudine 19° ut 3 ad 2. Erat ergo

$$V:v = 3:2$$
$$BAG = 24°$$
$$BAF = 71°$$

Quare

$$A = \log \tfrac{3}{2} : (\sec 71° - \sec 24°)$$

unde adhibendo logarithmos Briggianos habebitur

$$A = 0{,}089073.$$

Adeoque erit

$$-\log v = 0{,}089073 . \sec \gamma$$

§. 886. Pro angulo incidentiae recto est $\sec \gamma = 1$, quare

$$-\log v = 0{,}089073$$

siue

$$v = 0{,}8146.$$

Ut adeo si lumen solare verticaliter incideret in athmosphaeram pars eius circiter quinta ab aere interciperetur. Quae quidem admodum parua videtur, quippe cel. BOVGVER experimentum ad superficiem maris adeoque in infimo athmosphaerae telluris superficiem obtegentis strato instituit. Ego vero *Curiae Rhaetorum*, ubi altitudo barometri media est 26 dig. paris.

parif. inueni hanc debilitationem longe esse maiorem. Experimentum in *Pyrometria* descriptum dabo, cum principia quibus innititur hic desint. Eo vero per diem integram continuato inueni lumen verticaliter in athmosphaeram delabens debilitari in ratione 100 ad 59, siue fere 5:3, unde eius debilitationem ad maris superficiem hac certe non esse minorem meo iure infero. Est ergo pro angulo $\gamma = 0$, $v = 0{,}59$, adeoque

$$\log v = \log 0{,}59 = -0{,}229148$$

$$A = 0{,}229148$$

Unde

$$\log \frac{1}{v} = 0{,}229148 \cdot \sec \gamma.$$

siue, quod hic fere perinde est

$$\log \frac{1}{v} = 0{,}23 \cdot \sec \gamma.$$

Hinc calculo subducto sequentem concinnaui tabellam, quae exempli loco erit

altitudo sideris	debilitatio luminis v	altitudo sideris	debilitatio luminis v
90	0,5889	40	0,4387
80	0,5841	30	0,3467
70	0,5692	20	0,2126
60	0,5425	10	0,0476
50	0,5009	lumen extra aerem	1,0000

§. 887. Ceteri coefficientes seriei erutae (§. 880.) successiue definiendi sunt, quod eodem

dem fere modo perficere licebit, quo in tractatu: *Les proprietés remarquables de la route de la lumiere par les airs*, coefficientes seriei, qua exhibentur refractiones astronomicae definiui. Sumtis enim successiue angulis γ maioribus, successiue quoque termini seriei primum sequentes notabiliores fiunt, quam ut reiici possint. Unde adeo successiue definietur coefficiens A, atque hoc dato, coefficiens B, quo inuento habebitur coefficiens C &c.

§. 888. Cum logarithmus debilitationis luminis sit summa obstaculorum, quae lumen in via sua offendit, independenter a curuatura viae & disseminatione obstaculorum (§. 876.) hinc concipere licebit atmosphaeram ita esse depressam, ut disseminatio ista ubique sit aequalis. Hinc curtanda erit luminis via, cum iam obstacula ista sibi sint viciniora, eaque gaudeant densitate, quae est ad ipsam telluris superficiem.

§. 889. Ut ergo videamus, qua ratione via ista pro varia incidentiae obliquitate sit curtanda, primo ponemus strata depressa naturalibus ipsique telluris superficiei esse concentrica. Sit ergo C centrum telluris, AR eius superficies, AB altitudo athmosphaerae naturalis, PMmp stratum naturale quodlibet. Hoc depressum sit in QNnq. Vocetur

Fig. 81.

$$AC = 1.$$
$$CP = r$$
$$CQ = \varrho$$
$$\text{angulus } BAD = \gamma$$

Densitas in M siue in P fiat $= \delta$, densitas ad superficiem telluris $= 1$, atque patet fore

$$d\varrho = \delta . dr$$

Ita

Ita enim stratum Pp deprimendum est ut obstacula in Qq sint aeque densa ac in A.

§. 890. Similiter patet debere esse Nn $= \delta$.Mm, cum lumen spatiolum nN percurrendo aeque debilitari debeat, ac si percurreret spatiolum Mn. At vero facile ostendi poterit esse Nn $> \delta$. Mm. Est enim

$$AM = \sqrt{(rr - \sin\gamma^2)} - \cos\gamma$$
$$AN = \sqrt{(\varrho\varrho - \sin\gamma^2)} - \cos\gamma$$

Quare differentiando

$$Mm = \frac{rdr}{\sqrt{(rr - \sin\gamma^2)}}$$
$$Nn = \frac{\varrho d\varrho}{\sqrt{(\varrho\varrho - \sin\gamma^2)}}$$

§. 891. At lumen utrumuis spatiolum permeando aeque debilitatur, quare cum densitas in M sit $= \delta$, in N $= 1$, erit

$$\frac{\delta rdr}{\sqrt{(rr - \sin\gamma^2)}} = \frac{\varrho d\varrho}{\sqrt{(\varrho\varrho - \sin\gamma^2)}}$$

Sed ob

$$Qq = \delta . Pp$$

erit

$$d\varrho = \delta . dr$$

unde substituendo deberet esse

$$\frac{r}{\sqrt{(rr - \sin\gamma^2)}} = \frac{\varrho}{\sqrt{(\varrho\varrho - \sin\gamma^2)}}$$

adeoque

$$1 - \sin\gamma^2 : rr = 1 - \sin\gamma^2 : \varrho\varrho$$

siue

$$r = \varrho$$

Est vero

$$r > \varrho$$

quare

quare erit quoque

$$Nn > \delta . Mm$$

§. 892. Aut ergo curtanda aut incuruanda erit via luminis in aere depreſſo. Priori caſu ſuperficies aeris depreſſi haud erit ſuperficiei telluris concentrica, cum via quaeuis AN breuior euadat, ac foret ſi circuli QN, quem ſuperficiem iſtam denotare ponemus, centrum eſſet ipſum centrum telluris C. Unde ſi forte fortuna ſuperficies iſta QN eſſet ſphaerica, huius diameter diametro telluris eſſet minor.

§. 893. Poſteriori caſu ſtrata aeris depreſſi concentrica eſſe poterunt, at facile euincetur viam luminis ita eſſe incuruandam, ut breuior fiat. Vocetur ergo

$$\text{angulus } Mm\mu = \omega$$
$$Nn\nu = \varphi$$

atque erit ſpatiolum

$$Mm = dr . \sec \omega$$
$$Nn = d\varrho . \sec \varphi$$

Sed debet eſſe

$$Nn = \delta . Mm$$

quare erit

$$\delta . dr . \sec \omega = d\varrho . \sec \varphi .$$

Eſt vero

$$\delta . dr = d\varrho$$

unde erit

$$\sec \omega = \sec \varphi$$

ſiue

$$\omega = \varphi .$$

Quodſi ergo via luminis per athmoſphaeram eſſet logiſtica ſpiralis, eadem quoque foret eius via per aerem depreſſum. Hoc enim caſu foret $\omega = \varphi$.

§. 894. Alter casus quo est $\omega = \phi$ obtinet, ubi singula strata fuerint plana, atque lumen ista recta percurrat.

§. 895. Sit ratio inter sinus inclinationis & refractionis luminis dum ex aere qui est in M incidit in aerem, qui est in A, $= m:1$, via luminis in aere naturali erit talis ut sit

$$\sin\omega = \frac{m.\sin\gamma}{r}$$

Ponamus porro viam luminis in aere depresso esse rectilineam, erit

$$\sin\phi = \frac{\sin\gamma}{\varrho}$$

At debet esse $\phi = \omega$, quare esset

$$\frac{m}{r} = \frac{1}{\varrho}$$

siue $\quad m:1 = r:\varrho$

Quodsi ergo ratio inter semediametros r, ϱ *esset eadem, quae est inter sinus inclinationis & refractionis luminis, cum ex aere M immediate incidit in aerem A, via luminis in aere depresso esset rectilinea.* At vero ratio prior posteriorem longe excedit, quare via luminis in aere depresso ita est incuruanda, ut concauitatem rectae AB obuertat, adeoque breuior erit, quam recta AN.

§. 896. At vero via luminis in aere depresso commodius assumitur rectilinea. Videamus ergo, qua ratione ista erit curtanda. Sit C centrum telluris, CA eius diameter, AB altitudo aeris naturalis, cuius superficies BMQ superficiei telluris sit concentrica. Porro sit AP altitudo aeris depressi verticalis, PNR eius superficies, PE radius circuli curuam PNR Fig. 82

in P oſculantis. Ponamus iam lumen verticaliter incidens per rectam PA debilitari in ratione $1 : V$, lumen ſecundum NA obliquius incidens minui ut 1 ad v, atque erit (§. 877.)

$$\log \frac{1}{V} = n.AP.$$

$$\log \frac{1}{v} = n.AN.$$

adeoque

$$AP:AN = \log \frac{1}{V} : \log \frac{1}{v}$$

§. 897. Cum iam rationes $1 : V$, $1 : v$ experimentis dentur, dabitur quoque ratio inter AP & quamcunque AN, ut adeo adplicatae AP dato cuique angulo PAN respondentes quotlibet ex obſeruationibus deduci poſſint.

§. 898. Sit v. gr. $1 : V = 5 : 3$, & $1 : v$ pro lumine horizontali RA $= 2000 : 1$, erit

$$AP:AR = \log 5 : \log 2000.$$

adeoque

$$AP:AR = 0{,}2218488 : 3{,}3010300$$

Ponamus puncta P, R eſſe in circulo, cuius centrum ſit E, fiatque AE $= a$, EP $=$ ER $= b$, erit

$$AP = b - a$$
$$AR = \sqrt{(bb - aa)}$$

unde

$$AP:AR = 1 : \sqrt{\left(\frac{a+b}{b-a}\right)}$$

$$\sqrt{(b-a)} : \sqrt{(b+a)} = 0{,}2218488 : 3{,}3010300$$

$$(b-a) : (a+b) = 0{,}0491226 : 10{,}8967991$$

$$b:a = 1{,}0090568$$

adeo-

adeoque angulus

$AER = 7^{\circ},41'$.

Quodsi ergo curua PNR esset circularis, arcus inter verticem P & horizontem R foret $7\frac{2}{3}$ gr. Quae curuatura cum sit satis exigua, atque debilitatio luminis pro ratione obliquitatis incidentiae valde uniformiter crescat, eiusmodi circulum absque notabili errore verae curuae substituere licebit.

§. 899. Semidiametrum huius circuli semidiametro telluris AC notabiliter esse minorem supra iam notauimus. (§. 892.) Quaenam vero inter utramque sit ratio experimentis difficillime detegetur. Omnibus tamen rite perpensis altitudinem AP unum milliare germanicum haud excedere pono. Quare cum sit

$b:a = 1,009:1$

erit

$(b-a):a = 9:1000 = 1:111.$

ut adeo semidiameter vel potius distantia centri a superficie telluris AE esset circiter 111 mill. germ. At radius telluris est fere 860 mill. germ. adeoque fere octies maior.

CAPVT II.

Indagatur claritas, qua lumen in mediis diaphanis, potissimum vero in athmosphaera telluris dispersum, media ista spectanda exhibet.

§. 900. Inter media diaphana, quae ob dispersionem luminis veluti colore quodam tincta spectabilia sunt, eminent

aqua marina & aer. Illam viridem hunc vero caeruleum & quandoque sole nempe in horizonte versante rubicundum prae se ferre colorem neminem fugit. Utrumque vero hunc casum eodem prorsus perlustrandum esse calculo vel per se patet. Unde posteriorem potissimum explorare propositum est, huncque, quantum eius fieri licebit, ad priorem utpote faciliorem, reducemus.

§. 901. Ne vero omnes difficultates, quae hic occurrunt, iam initio simul in calculum inducantur, primo ponemus strata aeris esse plana, atque hoc assumto calculum rudiorem praestruemus sequentem in modum.

Fig. 83. §. 902. Sit AB superficies telluris quantumuis extensa, CD superficies athmosphaerae ipsi AB parallela. Radii solares in hanc incidant sub directione CA, DB, atque eorum quantitas, cum normaliter in CD incidunt dicatur 1, quantitas sub angulo CAB incidentium sit $=q$. erit

$$q = \sin CAB.$$

Porro summa obstaculorum in recta verticali AE vocetur $=\delta$, erit summa eorum, quae lumen in via sua offendit $=\delta.\sec EAC$. Ab his lumen debilitetur in ratione $1:v$, erit (§. 876.)

$$\log \frac{1}{v} = \delta.\sec EAC$$

siue dicto $\log e = 1$, erit

$$v = e^{-\delta.\sec EAC}$$

§. 903. Sit angulus $EAC = \gamma$, atque debita substitutione facta prodit quantitas luminis, quod

quod directe in AB peruenit, quodque dicemus λ,

$$\lambda = \cos\gamma . e^{-\delta:\cos\gamma}$$

siue

$$\lambda = \cos\gamma . e^{-\delta:\cos\gamma}$$

§. 904. Hinc ergo erit lumen in aere dispersum

$$q - \lambda = \cos\gamma\left(1 - e^{-\delta:\cos\gamma}\right)$$

Hoc lumen iam ita dispergitur, ut pars eius superiora petat, pars altera in superficiem telluris incidat, tertia vero particulis aeris ita inuoluatur, ut pro destructo haberi possit, etsi mea quidem sententia non possit non esse valde exigua.

§. 905. Ob infinitas luminis in aere reflexiones utraque pars prior ab aequalitate parum recedit, unde lumen inferiora petens dimidiae parti luminis dispersi aequale statuemus, eritque ergo

$$l = \tfrac{1}{2}\cos\gamma\left[1 - e^{-\delta:\cos\gamma}\right]$$

§. 906. Quodsi iam ponamus superficiem AB esse velut infinite extensam, omne hoc lumen in eam incidet, atque claritas hinc nascens ubique erit aequalis. Efferri itaque poterit per

$$l = \tfrac{1}{2}\cos\gamma\left[1 - e^{-\delta:\cos\gamma}\right]$$

Sed claritas, quae debetur lumini, quod directe in AB peruenit, est (§. 903.)

$$\lambda = \cos\gamma . e^{-\delta:\cos\gamma}$$

adeoque ratio inter utramque erit

$$\lambda : l = 2e^{-\delta:\cos\gamma} : \left[1 - e^{-\delta:\cos\gamma}\right]$$

§. 907. Quodſi lumen in AB directe incidens excipiatur plano ad directionem radiorum normali, dicta huius plani claritate $= L$, erit

$$L = e^{-\delta:\cos\gamma}$$

adeoque

$$L:l = 2e^{-\delta:\cos\gamma}:\cos\gamma\left[1 - e^{-\delta:\cos\gamma}\right]$$

§. 908. Ex his iam formulis, ponendo ut ſupra (§. 886.)

$$-\log v = 0{,}23 \,.\, \sec\gamma$$

ſequens concinnatur tabella

alt. ☉	L	λ	l
90	0,5889	0,5889	0,2060
80	0,5841	0,5752	0,2048
70	0,5692	0,5348	0,2024
60	0,5425	0,4598	0,1981
50	0,5009	0,3837	0,1911
40	0,4387	0,2820	0,1804
30	0,3467	0,1734	0,1633
20	0,2126	0,0727	0,1346
10	0,0476	0,0082	0,0827

§. 909. Tabellam hanc haud ſecus ac praecedentem (§. 866.) exempli ergo adiecimus. Denotat vero columna prima gradus altitudinis ſolis, ſecunda illuminationem plani radiis ſolaribus per athmoſphaeram debilitatis normaliter obuerſi, tertia illuminationem eiuſdem plani horizonti paralleli atque nonniſi a ſolis radiis directe illuminati, quarta denique illuminationem eiusdem plani, a toto caeli ſudi hemiſphaerio, ſed ab eo ſolo colluſtrati.

§. 910.

§. 910. Triplici vero haec tabella nititur hypothesi, quare iam dispiciendum est, quatenus ea ad verum accedat. Primo quidem aeris impelluciditatem assumsimus eam, quae lumen solare verticaliter incidens debilitat in ratione 5 : 3. Hoc vero nequaquam semper obtinet, cum maxime variabilis sit aeris pelluciditas. At vero si haec vel minimum mutetur, numeri tabellae eorumque ratio notabiliter immutantur. Ponamus v. gr. debilitationem verticalem esse ut 3 : 2, erit pro altitudine solis $= 90°$, $L = \lambda = 0,6666$, & $l = 0,1666$. adeoque quantitas L iam parte fere octaua est auctior, l vero parte quarta minor, ac est in tabella. Unde hoc casu $L : l = 4 : 1$ at in tabella $L : l < 3 : 1$. Secundum cel. BOVGVER fuit $v = 0,8146$, (§. 886.) adeoque si aer adeo sit pellucidus, erit pro altitudine solis $= 90°$, $L = \lambda = 0,8146$, adeoque $l = 0,0927$, quare $L : l = 9 : 1$. Quae ratio vel triplo maior est.

§. 911. Patet ergo hinc tabellam cuilibet aeris constitutioni peculiariter esse adcommodandam, siquidem ceterae duae hypotheses tolerabiles fuerint. Harum altera haec fuit. Lumen dispersum in aere ita diuidi, ut pars eius dimidia superiora petat, pars altera deorsum vergat. Quodsi secus hoc sit, immutanda erit illuminatio l, quippe quae sola ab ista hypothesi pendet, adeoque ponendo deorsum vergere partem n^{tam} faciendum erit

$$l = n . \cos\gamma [1 - L]$$

Ceterum positio $n = \frac{1}{2}$ eo magis ad veritatem accedet, quo minor fuerit angulus incidentiae

CAB, atque exacte obtinebit, ſi ſol fuerit in horizonte. Lumen enim a particulis aeri innatantibus, quas cunctas ſphaericas eſſe hic ſtatuere licebit, per conos diſpergitur, quorum axis directioni radiorum AC eſt parallela. Sic claritatem aeris imagini ſolis viciniorís ita decreſcere videmus, ut eo minor ſit, quo maior eſt eius a centro imaginis diſtantia adparens. Quantumuis ergo pro ratione huius diſtantiae inaequaliter diſpergatur, ſole in horizonte verſante, dimidium conorum iſtorum ſegmentum, quod fit ſecundum axin, inferiora petit, adeoque dimidia radiorum diſperſorum pars deorſum vergit. Quodſi altitudo ſolis ſat fuerit notabilis, erit $n > \frac{1}{2}$, quo ipſo claritas athmoſphaerae una cum illuminatione l intenditur. Quare hoc reſpectu numeri columnae l ſunt veluti minimi.

§. 912. Tertia hypotheſis, calculum quem ipſi ſuperſtruximus tunc tantum notabiliter turbat, cum ſol horizonti eſt proximus. Poſuimus vero ſtrata aeris eſſe plana. Hoc vero notabiliter protenditur via luminis fere horizontalis, atque in infinitum excurrit, quum altitudo ſolis eſt $= 0$. Quod vero cum reipſa ſecus ſit, tabella ultra angulum $\gamma = 70°$ vel $75°$ extendi vix poterit. Porro & iis caſibus quibus angulus BAM minor eſt, lumen a particulis horizonti AQ vicinioribus diſperſum reipſa minus eſt, cum longitudo rectarum AQ minor ſit ea, quae foret, ſi ſtrata aeris eſſent plana at que in infinitum extenſa. At vero haec im ☉ inutio numeros tabellae parum reddit varios. Non modo enim lumen a particulis

Fig. 82.

culis horizonti proximis obliquius incidit, atque hanc ipsam ob caussam illuminationem plani horizontalis parum auget, verum & lumen a particulis a plano A remotioribus in A incidens, ob longiorem viam ita debilitatur, ut fere nullum sit, adeoque perinde erit, siue strata aeris in infinitum excurrant, siue particulae istae plane absint. Ut adeo hoc saltem respectu numeri columnae quartae, qui altitudinibus solis maioribus respondent, salui maneant.

§. 913. Quodsi ergo inter rationes

$$L:l = 3:1$$
$$= 4:1$$
$$= 9:1$$

quas ante definiuimus (§. 910.) medium sumamus, atque, ponamus claritatem caeli sudi mediam esse eam, quae plani horizontalis illuminationem faciat sextam partem eius, quae obtinet, cum idem planum radiis solaribus in altitudine 90 gr. nomaliter obuertitur, claritas ista media eaque visa ita definietur.

§. 914. Illuminatio plani a toto caeli hemisphaerio collustrati est illuminatio absoluta (§ 100) quam ergo ponemus $= \pi$ Posita semidiametro disci solaris = 16′ atque in D concipiatur segmentum sphaericum cuius semidiameter itidem sit = 16′, erit illuminatio hinc nascens in C Fig. 11.

$$\eta = \pi (\sin 16')^2 = 0{,}00002166 . \pi$$

Sed illuminatio quae directe a sole prouenit est $= 6\pi$. qua ergo dicta = I, erit

$$\eta : I = 0{,}00002166 : 6$$

siue

$$\eta : I = 1 : 277000.$$

Toties ergo claritas solis, cum in aere mediocriter puro vertici propior est, claritatem caeli sudi mediam superat.

§. 915. Supra vidimus albedinem chartae cerussa pigmentatae esse $= 0,4230$. (§. 755.) Quae ergo si radiis solaribus normaliter obuertatur erit eius claritas, posita claritate, cum absolute illuminatur $= 6.\pi\, 0,4230$,

$$i = 6\pi . (\sin 16')^2 . 0,4230$$

siue

$$i = 0,00005498\, \pi$$

adeoque

$$\eta : i = 1 : 2,538 = 2 : 5$$

Ut adeo claritas chartae cerussa pigmentatae & a sole in altitudine 60° harente normaliter collustratae claritatem caeli sudi mediam $2\frac{1}{2}$ vicies superet.

§. 916. His ita iam generalius absolutis, specialiora tentabimus, atque ut & hic a facilioribus progredi liceat ad ea, quae magis sunt complexa, strata aeris ponemus esse plana horizontalia, atque particulas lumen intercipientes perfecte esse reflectentes. Positionem priorem pro angulis eleuationis maioribus absque notabili errore admitti posse iam vidimus (§. 912.) Posterior hypothesis cum a vero recedat, postea dispiciemus, quatenus ea admitti possit.

§. 917. Cum itaque particulae lumen intercipientes ponantur esse perfecte reflectentes, spectari poterunt ceu specula sphaerica minutissima. Quo vero assumto, ex superioribus patet, *claritatem luminis dispersi, nisi denuo inter-*

intercipiatur, in aequali a sphaerula distantia esse aequalem, atque particulas istas esse instar puncti tenui lumine radiantis, illuminationem vero esse reciproce ut quadratum distantiae (§.654.)

§. 918. Lumen vero, quod quaquauersum diffundunt est illud ipsum, quod in earum superficiem incidit, adeoque partim lumen solare directum, partim vero illud, quod a ceteris particulis atque obiectis illuminatis in eas reflectitur. Lumen directum cum sit longe densissimum primo hic solum considerabimus, atque hoc facto luminis quod per reflexionem accedit, rationem quoque habebimus.

§. 919. Cum logarithmus luminis residui sit in ratione cunctorum obstaculorum, quae lumen in via sua ostendit, (§. 876.) consequens est, si plana statuantur strata aeris *numerum obstaculorum esse in ratione secantis distantiae a vertice.* Hoc vero ipso aerem ita depressum assumere licet, ut cuncta obstacula aeque sint disseminata. Quo facto *logarithmus debilitationis luminis ubique erit in ratione viae percursae* (§. 877.)

§. 920. Quodsi ergo via percursa sit eadem, in eadem quoque ratione debilitabitur lumen, quantacunque fuerit incidentis intensitas. Sit ergo altitudo athmosphaerae depressae $AC = 1$, particula quaedam M, cuius claritas, in A spectanda, cum a radiis solaribus per FM in eam incidentibus illuminatur. Patet vero iam vel per se, *radiorum solarium intensitatem debilitari dum rectam* FM *percurrunt,* Fig. 84.

simi-

ſimilique modo ipſum lumen a particula M *in* A *reflexum iterum debilitari, dum rectam* MA *percurrit.*

§. 921. Ponamus v. gr. lumen ſolare per FM debilitari ut 1 : *n* erit eius intenſitas in M $= n$, atque in eadem ratione decreſcit illuminatio particulae M atque lumen ab ea in A reflexum. Sit ergo lumen particulae M $= mn$, atque hoc dum rectam MA percurrit debilitetur ut 1 : *p*, erit eius claritas in A ſpectabilis $= mnp$.

§. 922. At eadem fuiſſet haec claritas, ſi particula poſita fuiſſet in F, atque eius lumen *m* permeaſſet viam FMA, quae eſt ſumma utriuſque viae. Notandum vero ſermonem hic eſſe de claritate viſa, quippe quae a diſtantia nil mutatur. (§. 794.)

THEOREMA L.

§. 923. *Eadem eſt claritas viſa particulae* M *a radiis ſolis ſecundum* FM *incidentibus, colluſtrata quae foret, ſi particula eſſet in* F *poſita, eiuſque lumen per ſummam viae* FMA *in* A *incideret.*

DEMONSTRATIO.

Etenim in F a ſole ita colluſtratur ut eius claritas ſit $= m$, at vero percurrendo viam FM lumen eius debilitatur, ut ſit $= mn$, hocque percurſa via AM tandem euadit $= mnp$. Quae claritas cum ſit eadem ac in caſu praecedenti, conſtat propoſitum.

§. 924. Conſequens hinc eſt, *pro quauis particula* M *aſſumi poſſe lumen* m, *quod percurrat ſummam viae* MF + FA, *atque prodire claritatem eam, qua reuera in* M *ſpectabilis eſt.*

§. 925.

§. 925. His ita praestructis inuestigabimus claritatem omnium particularum in recta AB sitarum. Sit ergo lumen m, de quo antea, $=1$, altitudo aeris depressi $AC = 1$.

$$\text{abscissa } CP = x$$
$$\text{ang. } CAB = \gamma$$
$$\text{ang. } FDE = \omega$$

Porro vocetur lumen particulae in $A = v$, & subtangens logisticae $= 7$, atque erit (§. 919.)

$$-\log v = (FM + MA) : 7$$
$$FM = x \sec\omega$$
$$MA = (1 - x)\sec\gamma$$

adeoque

$$-\log v = (x.\sec\omega + (1 - x)\sec\gamma) : 7$$

siue posito $\log e = 1$, erit

$$v = e^{(x(\sec\gamma - \sec\omega) - \sec\gamma):7}$$

§. 926. Sit iam numerus particularum in recta verticali $AC = 1:7$, erit numerus earum, quae sunt in $Mm = dx.\sec\gamma:7$. Ponatur porro harum claritas in $A = d\lambda$, erit

$$d\lambda = e^{(x\sec\gamma - x\sec\omega - \sec\gamma):7} \quad dx.\sec\gamma:7$$

adeoque integratione facta debitaque adiecta constante, erit

$$\frac{\sec\gamma - \sec\omega}{\sec\gamma}.\lambda = e^{(x\sec\gamma - x\sec\omega - \sec\gamma):7} - e^{-\sec\gamma:7}$$

Quod est lumen omnium particularum in recta BM sitarum. Constans enim ita adiecta est ut x & λ simul euanescerent.

§. 927. Fiat iam $x = 1$, habebitur lumen aeris per totam rectam AB visum

$$L =$$

$$L = \frac{e^{--\sec\omega:7} - e^{--\sec\gamma:7}}{(\sec\gamma -- \sec\omega):\sec\gamma}$$

siue si numerus logarithmi designetur per vl, erit

$$L = \frac{vl(--\sec\omega:7) -- vl(--\sec\gamma:7)}{(\sec\gamma -- \sec\omega):\sec\gamma}$$

§. 928. Quodsi fuerit $\gamma = \omega$, haec formula irrita euadit. Quare recurrendo ad differentialia, pro hoc casu habebitur

$$L = e^{--\sec\gamma:7} . \sec\gamma:7$$

siue

$$L = vl(--\sec\gamma:7) . \sec\gamma:7$$

Fig. 85. §. 929. Sit AC altitudo aeris depressi $= 1$, AB superficies telluris, CD logistica, cuius subtangens $= 7$. Sit porro AP $= \sec\omega$, AQ $= \sec\gamma$, erunt PM, QN numeri his logarithmis respondentes. Ducantur NR, MS asymtoto AB parallelae, atque per puncta N, M agatur recta NMT, eritque

$$PM = e^{--\sec\omega:7}$$
$$QN = e^{--\sec\gamma:7}$$
$$PQ = \sec\gamma - \sec\omega$$
$$MK = PM - QN$$

adeoque

$$L = \frac{MK . AQ}{PQ} = RT$$

ut adeo constructione maxime concinna habeatur claritas luminis datae eleuationi solis dataeque altitudini puncti caeli respondens.

§. 930.

§. 930. Cum ergo pars abscissa RT sit claritas aeris erit haec maxima, ubi fuerit $\gamma = 90^\circ$, & $\gamma = \omega$. Quod ut pateat, fiat breuitatis ergo

$$\sec\omega : \daleth = a = \text{const.}$$
$$\sec\gamma : \daleth = z$$

erit

$$L = \frac{z\left(e^{-a} - e^{-z}\right)}{z - a}$$

quare differentiando, atque faciendo $dL = 0$, habetur

$$a : z = (z-a)e^{-z} : \left(e^{-a} - e^{-z}\right)$$

Quod obtinebit si fuerit $z = a$, siue $\gamma = \omega$, eritque tunc (§. 928.)

$$L = e^{-\sec\gamma:\daleth} . \sec\gamma : \daleth$$

Porro obtinebit, si fuerit $\gamma = 90^\circ$, siue $z = \infty$, Quo casu simpliciter est

$$L = e^{-\sec\omega:\daleth}$$

Ut adeo claritas aeris maximarum altera sit in horizonte, altera in ipsa altitudine solis.

§. 931. Utraque haec claritas ab altitudine solis pendet, atque proinde hoc respectu variabilis est. Prior, siue horizontalis omnium maxima erit, ubi fuerit $\omega = 0$, eritque hoc casu $= L = e^{-1:\daleth}$. Posterior, siue quae obtinet in ipsa altitudine solis iterum maxima erit, ubi fuerit $\sec\gamma = \sec = \daleth$. eritque tunc

$$L = e^{-1}$$

Uni-

Unitas vero, ad quam singulae istae claritates sunt referendae, est claritas particulae extra athmosphaeram a sole collustratae atque extra eam visae (§. 924.)

§. 932. Videamus iam, qualis sit athmosphaerae claritas, cum in B spectatur. Erit vero retentis iisdem literis, praeter quam
Fig. 84. quod v iam denotet claritatem particulae M in B visae,

$$-\log v = (FM + FB):7$$
$$FM = x\sec\omega$$
$$BM = x.\sec\gamma$$

unde

$$-\log v = x(\sec\omega + \sec\gamma):7$$

adeoque

$$v = e^{-x(\sec\omega + \sec\gamma):7}$$

Porro

$$d\lambda = v\,dx\sec\gamma:7$$

Hinc tandem

$$-\frac{(\sec\gamma + \sec\omega)}{7}.\lambda = e^{-x(\sec\gamma + \sec\omega):7}.\sec\gamma:7 - \sec\gamma:7$$

§. 933. Fiat iam $x = 1$, atque erit

$$L = \frac{1 - e^{-(\sec\gamma + \sec\omega):7}}{(\sec\gamma + \sec\omega):\sec\gamma}$$

Quae est claritas totius rectae AB in B visae.

§. 934. Ducta CG ipsi AQ parallela, positaque
Fig. 85.

$$AP = \sec\gamma = CH$$
$$PQ = \sec\omega$$

pro-

producantur ordinatae QN, PM ut ſint QG, PH, atque ducta NC erit

$$L = KH.$$

Eſt enim

$$AQ = \sec\gamma + \sec\omega = CG$$

$$NQ = e^{-(\sec\gamma + \sec\omega):\daleth}$$

$$GN = 1 - NQ$$

adeoque ſubſtitutione facta

$$L = \frac{NG.CH}{CG} = HK$$

§. 935. Longe itaque aliter hoc caſu definitur claritas acris ac in caſu praecedente. Si fuerit $\gamma = \omega$, erit

$$L = \tfrac{1}{2}\left(1 - e^{-2\sec\gamma:\daleth}\right)$$

Quodſi inſuper ponatur $\gamma = \omega = 0$, erit

$$L = \tfrac{1}{2}\left(1 - e^{-2:\daleth}\right)$$

§. 936. Hactenus rectas AB, FD ſpectauimus, quaſi eſſent in eodem plano verticali. Fig. 84 At hoc nequaquam neceſſarium eſt, cum manente particula M, maneat quoque longitudo utriuſque viae FM, MA vel FM, MB. Quare generaliter denotabit angulus CAM $= v$ diſtantiam rectae AB vel punctorum in hac ſitorum a vertice, angulus FDE $= \omega$ generaliter erit diſtantia ſolis a vertice, ut adeo perinde ſit, ſiue rectae AB, FD ſint in eadem plaga, ſiue ſint in diuerſis, ſimulac utraque hypotheſis, cui calculum iſtum ſuperſtruximus, a vero non ita multum aberret (§. 916.)

§. 937. Porro claritas visa *L* est claritas linearis, quae quidem cum visa coincidit. At cum illuminatio inde nascens pendeat a distantia, atque sit reciproce ut eius quadratum, curatius inquirendum erit, an quaedam hinc enascatur diuersitas.

§. 938. Quodsi aerem ceu medium diaphanum intueamur, particulae istae, e quibus lumen in idem spatium retinae circulare incidit, sitae sunt in cono, cuius apex est ipsa oculi pupilla, basis vero in extremitate aeris. Ubicunque iam conus istà ita secetur, ut segmentum sit ad axin nomale, atque basis coni ponatur velut infinite parua, claritas particularum in segmento isto sitarum erit ea, quam supra definiuimus. Cumque earum numerus crescat directe ut quadratum distantiae, illuminatio vero cuique particulae debita sit reciproce ut idem quadratum, utraque haec ratio sese destruit, quare illuminatio erit simpliciter ut claritas linearis L, atque crescet, ut quadratum sinus semidiametri adparentis. Quod ut euidentius fiat, atque insuper pateat depressionem aeris illuminationi non officere, rem ita enucleabimus.

§. 939. Sit AC altitudo athmosphaere naturalis, AP altitudo quaecunque, ordinatae PN curuae CNG denotent densitatem particularum lumen intercipientium, atque primo quaeramus claritatem particulae M in A visae, & a radiis solaribus secundum directionem FM collustratae. Utraque vero & hic assumitur hypothesis, qua antea usi sumus (§. 916.)

Fig. 86.

§. 940.

§. 940. Fiat iam ut supra

$AP = 1$ ang. $CAM = \gamma$
$CP = x$ ang. $FDE = \omega$
$PN = y$ subt. logisticae $= 7$

itidem erit (§. 919.)

$-\log v = (CNP.\sec\omega + GNPA.\sec\gamma):7$

Est enim spatium CNP summa obstaculorum in CP & spatium GNPA est eadem summa in PA. Unde erunt cuncta obstacula in $FM = CNP.\sec\omega$, in $MA = GNPA.\sec\gamma$.

§. 941. Cum ergo sit

$$v = e^{-(CNP.\sec\omega + GNPA.\sec\gamma):7}$$

erit eo casu quo $\omega = \gamma$, totum spatium $GCA = A$, &

$$v = e^{-A.\sec\gamma:7}$$

Sed est $CNP = \int y dx$
$GNPA = A - \int y dx$

quare

$$v = e^{-(\int y dx(\sec\omega - \sec\gamma) + A\sec\gamma):7}$$

Hinc iterum haberetur lumen lineare *L* plane idem, quod supra inuenimus. (§. 927.) At quaeritur lumen, quod debetur cono, cuius vertex est in A, axis AC

§. 942. Sit latus coni istius Ab axi AB infinite vicinum, erit angulus $BAb = d\gamma$, Porro est

$AP = (1-x)$
$PM = (1-x)\text{tang}\gamma$
$MQ = (1-x).d\text{tang}\gamma$

spatiolum $MQqm = (1-x)dx.d\,\text{tang}\gamma$

quantitas particularum $= (1-x)dx.d\,\text{tang}\gamma.y:$

§. 943. Quodsi iam triangulum PAM circa axin AB gyretur, spatiolum MQqm describet annulum solidum, cuius

$$\text{radius} = PM = (1-x).\text{tang}\,\gamma$$
$$\text{area} = \pi(1-x)^2.dxd\,(\text{tang}\,\gamma)^2$$
$$\text{numerus particularum} = \pi.\,(1-x)^2.\,d\,(\text{tang}\gamma)^2 ydx$$

Unde cum illuminatio cuiuis particulae debita sit $= v:AM^2 = v:(1-x)^2.\text{sec}\gamma^2$, dicta illuminatione $= \eta$, erit

$$dd\eta = \frac{\pi.d\text{tang}\gamma^2}{\text{sec}\gamma^2}\, e^{-A\text{sec}\gamma} . e^{-\int ydx(\text{sec}\omega - \text{sec}\gamma)}\, ydx$$

Cuius intregrale addita debita constante

$$d\eta = \frac{\pi.d\text{tang}\gamma^2}{\text{sec}\gamma^2} . e^{-A\text{sec}\gamma} \frac{\left(1 - e^{-\int ydx(\text{sec}\omega - \text{sec}\gamma)}\right)}{\text{sec}\omega - \text{sec}\gamma}$$

Ut iam habeatur tota illuminatio, faciendum $\int ydx = A$, eritque

$$d\eta = \frac{\pi.d\text{tang}\gamma^2}{\text{sec}\gamma^2} \left(\frac{e^{-A.\text{sec}\gamma} - e^{-A\text{sec}\omega}}{\text{sec}\omega - \text{sec}\gamma} \right)$$

§. 944. Ut iam haec formula ad claritatem visam reducatur, illuminatio $d\eta$ per annuli magnitudinem adparentem est diuidenda. Est vero eius latitudo adparens $= d\gamma$, semidiameter adparens $= \text{sin}\gamma$, adeoque area $= 2\pi.\,\text{sin}\gamma.\,d\gamma$. Unde erit claritas visa

$$L = \frac{\left(e^{-A\text{sec}\gamma} - e^{-A\text{sec}\omega} \right) \text{sec}\gamma}{\text{sec}\omega - \text{sec}\gamma}$$

Quae

Quae aequatio cum ea, quam ſupra dedimus, prorſus coincidit (§. 927.) ſi fiat $A=1$.

§. 945. Aſſumta ſubtangente 7=2,171473 ſequentem concinnaui tabellam pro claritate rectarum AB in A viſa.

Fig. 85.

ang. γ, & ω	abſciſſae AQ&AP	ordinatae NQ&MP	claritas in altitudine ſolis	claritas in vertice
0	1,0000	0,6310	0,2906	0,2906
10	1,0154	0,6265	0,2923	0,2897
20	1,0642	0,6126	0,3002	0,2864
30	1,1547	0,5876	0,3123	0,2805
40	1,3054	0,5482	0,3248	0,2710
50	1,5557	0,4885	0,3500	0,2562
60	2,0000	0,3972	0,3666	0,2338
70	2,9238	0,2602	0,3503	0,1927
80	5,7588	0,0705	0,1870	0,1178

§. 946. Ope huius tabellae atque formulae (§. 927.)

$$L = \frac{AQ(MP - NQ)}{AQ - AP}$$

iam habebitur claritas aeris pro quibuſuis angulis γ, ω. Porro columna tertia oſtendit claritatem, quae in horizonte eſt (§. 930.) quamque maximam eſſe ſupra vidimus. Columna tertia alteram claritatem maximam exhibet, quam in ipſa altitudine ſolis obtinere inuenimus, quaeque fere ſemper claritate horizontali eſt inferior. Quintam columnam, quae claritatem in vertice exhibet, addidimus, ut cum utraque maxima comparari poſſet.

§. 947. Cum in altitudine solis claritas maxima sit, ubi fuerit AQ=7 (§. 931.) atque pro nostra tabella sit 7=2,171473, erit 7=sec. 62°,35', adeoque altitudo solis respondens =27°,25', & claritas ipsi debita $=e^{-1}$ =0,3679 =claritati quae tunc est in horizonte = debilitationi luminis, cum subtangentem 7 in aere depresso percurrit. Unitas vero, ad quam cuncti isti numeri sunt referendi, iam supra explicata est (§. 931.)

§. 948. Tabella haec & formulae hactenus erutae locum haberent, atque pro angulis γ, ω minoribus a vero haud ita multum aberrarent, si particulae lumen intercipientes perfecte essent reflectentes, nullaque accederet luminis inflexio, atque particula quaelibet ea tantum claritate esset visibilis, quae lumini solis directe incidenti debetur. At vero inaequalis luminis reflexio eiusque inflexio id efficit, ut loca aeris imagini solis viciniora clariora videantur. Cum vero particulas istas
Fig.86 sphaericas statuere liceat, ponamus imaginem solis esse in recta AB, quae spectetur ceu axis coni triangulo BAb descripti, radii solares cum paralleli sint, eadem ratione in singulas particulas, quae in superficie istius coni sunt, incidunt, eademque ergo ratione in A reflectuntur. Quodsi ergo in hac superficie ducantur rectae quaecunque Ab e vertice A, claritas harum rectarum inuicem comparari poterit ea, quae lumini solis directe in eas incidenti debetur, atque eatenus formulae supra erutae usui erunt. Quodsi porro angulus

lus BAb fuerit recto longe maior, non modo inflexionis effectus plane aberit, verum & ipsa quantitas luminis a particulis reflexa magis ad aequalitatem accedit, unde & his casibus non modo rectae Ab, quae ad eundem conum referuntur verum & eae, quae sunt ab axe AB remotiores vel ipsi propiores, earumque claritates lumini directo debitae conferri inter se poterunt.

§. 949. Triplicem esse caussam, quae lumen particularum auget, iam supra notauimus, atque facile ostendi poterit, *particulas, quae in eodem strato sunt, aeque esse luminosas, quantumuis differat earum lumen, si fuerint in stratis diuersis.* Etenim lumen solare, quod directe incidit in stratum PMqp viam percurrit eandem FM, adeoque eodem modo debilitatur, unde eadem inde enascetur particulae cuiuslibet claritas. Simili modo lumen, quod superficies telluris in quaslibet particulas huius strati reflectit, non potest non ipsis aequale superaddere claritatis augmentum, cum quaelibet particula eodem modo ipsi sit obuersa. Similique tandem ratione idem erit claritatis augmentum, quod cuilibet particulae eiusdem strati PM ab iis particulis adcrescit, quae in quolibet alio strato sitae sunt.

§. 950. Sit ergo AD superficies telluris, AC altitudo aeris depressi, CB eius superficies, PMmp stratum quodlibet, ordinatae PQ curvae EF referant claritatem particularum illius strati. Fig. 87.

Fiat iam

$$AC = 1$$
$$AP = \xi$$
$$PQ = y$$
$$\text{ang. } CAB = \gamma$$

atque quaerenda ſit claritas rectae AB in A viſa.

§. 951. Erit ergo

$$Mm = d\xi . \sec\gamma : 7$$

numerus particularum in ſpatiolo Mm (§. 926.) Porro earum lumen

$$= y d\xi . \sec\gamma : 7$$

Quod dum viam AM percurrit, ita debilitatur ut ſit

$$dz = e^{-\xi \sec\gamma : 7} . y dx . \sec\gamma : 7$$

Quodſi ergo detur y per ξ, dabitur quoque z ſiue claritas rectae AM, adeoque & claritas totius rectae AB.

§. 952. Reſoluatur haec formula in ſeriem, atque erit

$$dz = \frac{y d\xi . \sec\gamma}{7} \left(1 - \frac{\xi . \sec\gamma}{7} + \frac{\xi^2 . \sec\gamma^2}{2 . 7^2} - \frac{\xi^3 . \sec\gamma^3}{2 . 3 . 7^3} + \&c. \right)$$

adeoque

$$z = \frac{\sec\gamma}{7} \int y d\xi - \frac{\sec\gamma^2}{7^2} \int y \xi d\xi + \frac{\sec\gamma^3}{2 7^3} \int y \xi^2 d\xi - \&c.$$

Integralia huius ſeriei angulus γ non ingreditur, quare ſpectari poterunt ceu coefficientes, atque erit claritas totius rectae AB

$$Z = \frac{A \sec\gamma}{7} - \frac{B \sec\gamma^2}{7^2} + \frac{C . \sec\gamma^3}{2 . 7^3} - \frac{D . \sec\gamma^4}{2 . 3 . 7^4} + \&c.$$

§. 953.

§. 953. Facile vero ostendi potest, claritates EC, QP, AF a ratione aequalitatis parum differre. Quodsi enim eae tantum essent, quae debentur lumini directo, foret EQF logistica, cuius subtangens $=7$, atque per ea, quae supra inuenimus (§. 886.) foret

$$CE:AF=5:3$$

At cum quaelibet particula insuper a superficie telluris illuminetur, inferioribus maius accedit claritatis augmentum, quam superioribus, unde hoc respectu erit $CE:AF:<5:3$. Cumque porro aliud superaddatur augmentum claritatis, dum quaelibet particula a ceteris omnibus collustratur, inaequalitas inter claritates PQ fere euanescit.

§. 954. Ponamus ergo y const. erit

$$dz=y.e^{-\xi\sec\gamma:7}.dx.\sec\gamma:7$$

quare integrando habebitur

$$z=\text{Const.}-ye^{-\xi\sec\gamma:7}$$

Constans ita est addenda ut z & ξ simul euanescant, quare erit $=y$, unde ergo

$$z=y(1-e^{-\xi\sec\gamma:7})$$

adeoque ponendo $\xi=1$, habebitur claritas totius rectae

$$Z=y(1-e^{-\sec\gamma:7})$$

Patetque hinc esse y claritatem horizontalem.

Fig. 85. §. 955. Quodsi ergo AC denotet claritatem horizontalem y, atque fiat AP = sec γ, erit

$$PM = y.e^{-\sec\gamma:l}$$

$$HM = y\left(1 - e^{-\sec\gamma:l}\right) = Z$$

ut adeo hoc modo facile habeatur claritas datae distantiae a vertice respondens, atque per claritatem horizontalem definita.

§. 956. Claritas superficiei telluris & aeris pendet ab altitudine solis. Illa quidem ita, ut dicta distantia solis a vertice ω, decrescat in ratione

$$1 : \cos\omega . e^{-\sec\omega:l}$$

Contra ea claritas aeris pendet a claritate particularum in singulis stratis, quae ergo aliquanto minor erit, ubi imminuta fuerit distantia solis a vertice. Porro & ipsae particulae inferiores minus a sole collustrantur, cum depressior est huius altitudo. Neque tamen id fit ideo, quod iam in idem stratum pauciores radii incidant. Compensatur enim hoc decrementum ab aucto numero particularum, quae lumen in via sua offendit, quippe quae semper est in ratione reciproca sinus altitudinis. Verum ideo minuitur ista claritas, quia lumen, ob maiorem viam quam iam percurrit, notabilius debilitetur, adeoque debilius sit illud, quod in particulas telluris superficiei viciniores incidit. Quodsi ergo maior sit distantia solis a vertice, adplicatae curuae EQ tellurem versus notabilius decrescunt. Quare his

his caſibus eas aequales ſtatuere haud licet, etſi tolerabilis ſit haec poſitio, ubi diſtantia γ quinquaginta aut ſexaginta gradus non excedit. Facile enim patet, decrementum iſtud illuminationis directae magna ex parte iterum compenſari, quia lumen diſperſum claritatem cunctarum particularum iterum auget.

§. 957. Quatenus ergo aſſumere licet eſſe

$$Z = y\left(1 - e^{-\sec\gamma : l}\right)$$

tabula ſupra data (§. 886.) facile abibit in ſequentem

γ	Z	γ	Z
0	0.4111	50	0.5613
10	0,4159	60	0.6533
20	0,4308	70	0.78-4
30	0,4575	80	0.9524
40	0,4991	90	1,0000

In hac tabella claritas horizontalis eſt $=1$, angulus γ denotat diſtantiam a vertice, atque Z eſt claritas aeris ipſi reſpondens.

§. 958. Sit iam AB ſuperficies telluris, AC altitudo aeris depreſſi, CD eius ſuperficies, in M ſit particula, atque quaeritur ſumma luminis, quod a ſuperficie telluris in eam incidit. Ductis rectis infinite vicinis MP, Mp, fiat Fig. 88.

$$AC = 1$$
$$AM = x$$
$$\text{ang.}AMP = \phi$$

atque erit

$$AP = x.\text{tang}\,\phi$$
$$Pp = x.d\,\text{tang}\,\phi$$

Trian-

Triangulum PMA circa axin AM rotetur, atque ſpatiolum Pp deſcribet ſpatium annulare, cuius area

$$= 2\pi x^2 . \mathrm{tang}\,\phi . d\,\mathrm{tang}\,\phi .$$

At lumen ex hoc annulo in M incidens eſt in ratione ſpatii, & ſinus anguli emanationis, porro cum percurrere debeat viam $=$ PM, debilitabitur ob diuergentiam & diſperſionem radiorum, ut tandem ſit

$$d\eta = \frac{2\pi . x^2 . \mathrm{tang}\,\phi . d\,\mathrm{tang}\,\phi . \mathrm{coſ}\,\phi . e^{-v . \mathrm{ſec}\,\phi : l}}{x^2 . \mathrm{ſec}\,\phi^2}$$

Quae aequatio ſi debite contrahatur abit in ſequentem

$$d\eta = \frac{2\pi . d\,\mathrm{ſec}\,\phi}{\mathrm{ſec}\,\phi^2} . e^{-x . \mathrm{ſec}\,\phi : l}$$

Quae ſi in ſeriem reſoluatur, abſoluta integratione hanc induit formam

$$\frac{-\eta}{2\pi} = \mathrm{conſt.} - \frac{1}{\mathrm{ſec}\,\phi} - \frac{x}{l} \log \mathrm{ſec}\,\phi + \frac{xx}{2ll} \mathrm{ſec}\,\phi - \frac{x}{2.2.3 l^3} \mathrm{ſec}\,\phi + \frac{x^4}{2.3.3.4 l^4} \mathrm{ſec}\,\phi^3 - \&c.$$

Conſtans ita eſt addenda, ut η & ϕ ſimul euaneſcant; quare erit

$$\mathrm{Conſt.} = 1 - \frac{xx}{2.ll} + \frac{x^3}{2.2.3.l^3} - \frac{x^4}{2.3.3.4.l^4} + \&c.$$

§. 959. Fiat iam $\phi = 90°$, ut habeatur lumen a tota ſuperficie telluris in particulam M reflexum, eritque

$$\eta = 2\pi \left(1 - \frac{x^2}{2l^2} + \frac{x^3}{2.2.3.l^3} - \frac{x^4}{2.3.3.4.l^4} + \&c.\right)$$

Quod

Quod lumen ut cum lumine solari comparari possit, ponatur claritas solis $= 1$, claritas superficiei telluris $= t$; cum utrumque incidat in particulam sphaericam M, anguli incidentiae sunt iidem. *Quare illuminatio particulae M quatenus a sole collustratur est ad eam, quae a superficie telluris ipsi adcrescit ut factum ex* 1 *in aream disci solaris adparentis ad factum ex* t *in aream hemisphaerii.* Hic enim obtinet positio illa, quam supra (§. 101.) minus recte ad definiendam claritatem lunae adplicatam fuisse diximus a cel. SMITHIO.

§. 960. Sit ergo semidiameter solis adparens $= s$, ratio ista composita erit

$$= 2\pi(1 - \cos s) : 2\pi t = (1 - \cos s) : t$$

§. 961. Incidant iam radii solares secundum rectam FM, sitque angulus FMC $= \omega$, erit via FM $= (1 - x)\sec\omega$ adeoque lumen solare debilitatur in ratione

$$= 1 : e^{-(1-x)\sec\omega : \eta}$$

Sit ergo claritas particulae M hinc nascens $= v$, erit

$$v = e^{-(1-x)\sec\omega : \eta} . 2\pi(1 - \cos s)$$

&

$$\eta = 2\pi t \left(1 - \frac{x^2}{2.\eta^2} + \frac{x^3}{2.2.3\eta^3} - \frac{x^4}{2.3.3.4\eta} - \&c.\right)$$

adeoque

$$v : \eta = e^{-(1-x)\sec\omega : \eta} . (1 - \cos s) : t \left(1 - \frac{x^2}{2.\eta^2} + \frac{x^3}{2.2.3.\eta^3} - \&c.\right)$$

§. 962.

§. 962. Claritas superficiei telluris pendet a quintuplici caussa. Primaria est sol, cuius radii in eam incidunt; atque hoc respectu erit $t \backsim \pi.\ \sin s^2$. Hoc vero lumen dum aerem peragratur, ita minuitur ut iam sit

$$t \backsim \pi.\ \sin s^2. e^{-\sec \omega : 7}$$

Porro minuitur ob obliquitatem incidentiae, quare iam erit

$$t \backsim \pi.\ \sin s^2. e^{-\sec \omega : 7} . \cos \omega$$

§. 963. Huic lumini accedit illud, quo ipsa athmosphaera tellurem collustrat. Dicta ergo claritate solis extra athmosphaeram visa $= 1$, claritate athmosphaerae media $= \lambda$, erit lumen hinc nascens, ob illuminationem absolutam

$$= \pi . \lambda$$

Quare iam erit

$$t \backsim \pi \left(\lambda + \sin s^2 . c^{-\sec \omega : 7} . \cos \omega \right)$$

§. 964. Hoc lumen porro minuitur, cum pars eius a corporibus terrenis absorbeatur. Dicta ergo horum albedine $= A$, erit (§. 727.)

$$t = \pi . A' \left(\sin s^2 . e^{-\sec \omega : 7} . \cos \omega + \lambda \right)$$

Quae adeo est claritas superficiei telluris, cum claritate solis & athmosphaerae comparabilis, sive ad eandem unitatem revocata. Est vero πA illuminatio absoluta, quare hic fiet simpliciter $= A$, unde substitutione facta prodit

$$\frac{v}{\eta} = \frac{(-\cos s). e^{-(1-x)\sec \omega : 7}}{A(\sin s^2 . \cos \omega . e^{-\sec \omega : 7} + \lambda).(1 - 2.7^2 + 2.2.3 7^3 - \&c.)}$$

sive

siue reductione facta

$$\frac{v}{\eta} = \frac{e^{x\sec\omega:\daleth}}{A(\cos\omega.(1+\cos s) + \frac{\lambda.e^{\sec\omega:\daleth}}{1-\cos s}).(1-\frac{x^2}{2.\daleth^2}+\frac{xxx}{2.2.3\daleth^3}-\&c.)}$$

§. 965. Est vero ob semidiametrum s vehementer paruam $1+\cos s = 2$, $1-\cos s = 2\sin\frac{1}{2}s^2 = \frac{1}{2}\sin s^2$, unde

$$\frac{v}{\eta} = \frac{e^{x\sec\omega:\daleth}}{2A(\cos\omega + \lambda e^{\sec\omega:\daleth}.\operatorname{cosec} s^2).(1-\frac{x^2}{2\daleth^2}+\frac{x^3}{2.3.3.\daleth^3}-\&c.}$$

§. 966. Haec ratio potissimum hieme, cum alta nix totam superficiem telluris obtegit, a ratione aequalitatis parum differt, ut adeo lumen, quod telluris superficies in particulas aeris reflectit his casibus omitti nequeat.

§ 967. Sit v gr. quodam casu
altitudo particulae $x = \frac{1}{2}$
distantia solis a vertice $\omega = 60^\circ$.
subtangens logisticae $\daleth = 2$
claritas athmosphaerae $\lambda = \frac{1}{271000}$ (§. 914.)
semidiameter solis $s = 0^\circ, 16'$

$\sec\omega = 2$ & $\cos\omega = \frac{1}{2}$ erit

$e^{x\sec\omega:\daleth} = 1,649$

$e^{\sec\omega:\daleth} = 2,7183$

$\operatorname{cosec}.s^2 \quad 46164$

adeoque inita computatione

$v:\eta = 0,913:A$

§. 968.

§. 968. Quodſi ergo albedinem niuis ponamus $=\frac{2}{5}$, erit

$$v:n=2,282:1$$

Hoc ergo caſu particula M in altitudine media aeris depreſſi poſita ita a ſuperficie telluris & a radiis ſolaribus colluſtratur, ut claritas hinc naſcens poſteriori caſu ea quam a lumine telluris adquirit tantummodo duplo maior ſit.

§. 969. Superficiem telluris in hoc computo planam aſſumſimus, quod ſi non fuerit, plus uno reſpectu turbatur calculus, at hiſce diutius immorari operae pretium non eſt. Videamus ergo, qua ratione cuilibet particulae claritatis augmentum a ceteris accedat. Sit ſtratum quodlibet QSsq, fiat

$$MQ=x$$

$$\text{ang.}RMQ=\varphi$$

eodem modo quo ſupra (§. 958.) erit area annuli plani, cuius latitudo SR, ſemidiameter RQ

$$=2\pi.\text{tang}\varphi.d\,\text{tang}\varphi.x^2$$

At cum annulus ſit ſolidus, eiuſque craſſities $=Qq=dx$, erit iam eius area

$$=2\pi.xxdx.\text{tang}\varphi.d\text{tang}\varphi.$$

Sit iam ut ſupra (§. 926.) numerus particularum in ſpatio $1=1:7$, claritas unius particulae $=y$, erit ſumma claritatum pro annulo

$$=\frac{2\pi xxdx.}{7}y.\text{tang}\,\varphi.d\,\text{tang}\,\varphi.$$

At hoc caſu angulus emanationis & incidentiae hic eſt idem, quare lumen ſimpliciter debilitatur ob radiorum diuergentiam & diſperſionem, quare cum longitudo viae ſiue diſtantia

tia MR sit $= x \sec\phi$. erit tandem lumen in M incidens

$$dd\lambda = \frac{2\pi . yxxdx . \tan\phi . d\tan\phi . e^{-x\sec\phi : 7}}{7xx . \sec\phi^2}$$

Quae aequatio facile abit in sequentem

$$dd\lambda = \frac{2\pi . y . dx . d\sec\phi . e^{-x\sec\phi : 7}}{7 . \sec\phi .}$$

Qua in seriem resoluta, facta integratione, additaque debita constante, prodit

$$d\lambda = \frac{2y\pi dx}{7}\left(\log\sec\phi - \frac{x\sec\phi}{7} + \frac{x^2\sec\phi^2}{2.2.7^2} - \frac{x^3 . \sec\phi^3}{2.3.3.7^3} + \&c.\right)$$
$$+ \frac{2y\pi dx}{7}\left(\frac{x}{7} - \frac{x^2}{2.2.7^2} + \frac{x^3}{2.3.3\,7^3} - \frac{x^4}{2.3.4.4\,7^4} + \&c.\right)$$

§. 970. Ut iam habeatur lumen e toto strato QS in M incidens, faciendum $\phi = 90°$, eritque

$$d\lambda = \frac{2y\pi dx}{7}\left[\frac{x}{7} - \frac{x^2}{2.2.7^2} + \frac{x^3}{2.3.3.7^3} - \&c.\right]$$

§. 971. Quodsi ergo iam detur y per x, secunda integratio absolui poterit, atque dabitur λ per x. Quodsi porro fiat $x = MA$ & $x = -CM$, habebitur lumen Λ, quod singulae particulae omnium stratorum in particulam M reflectunt, quod si addatur utrique lumini v & η, quod debetur radiis solaribus & superficiei telluris (§. 961. seqq.) habebitur ipsa claritas particulae M. Quare hoc modo dabitur aequatio

inter y & AM. Quae vero nisi pro hac aequatione assumatur series, erui vix poterit. Assumta vero serie calculus adeo erit prolixus, ut quomodo ad finem perduci possit ego quidem non videam, unde prolixitatem tantum ostendam.

§. 972. Fiat itaque $QK = y$, atque ponatur

$$y = \alpha + \beta . AQ^2 + \gamma . AQ^3 + \delta . AQ^4 + \&c.$$

Porro ponatur $AM = z$, erit $AQ = z - x$ adeoque

$$y = \alpha + \beta(z-x) + \gamma(z-x)^2 + \delta(z-x)^3 + \&c.$$

&

$$MN = \alpha + \beta z + \gamma z^2 + \delta z^4 + \&c.$$

At facile iam patet priorem seriem ita esse immutandam, ut eliminetur x, atque sola z remanente series ista cum altera MN comparari poterit, quo definiantur coefficientes α, β, γ &c.

§. 973. Substituatur ergo series y in aequatione $d\lambda$ (§. 970.) atque prodibit

$$d\lambda = \frac{2\pi dx}{7}\Big(\frac{\alpha x}{7} - \frac{\alpha x^2}{2.2.7^2} + \frac{\alpha x^3}{2.3.3\,7^2} - \&c.$$
$$+ \frac{\beta(z-x)^2 x}{7} - \frac{\beta(z-x)x^2}{2.2.7^2} + \&c.$$
$$+ \frac{\gamma(z-x)^2 x}{7} - \frac{\gamma(z-x)^2 x^2}{2.2.7^2} + \&c.$$
$$+ \&c. \qquad \&c.\Big]$$

Hinc ergo integratione facta incidemus in seriem serierum, quam quidem hic transcribere superfluum est. Ea vero absoluta faciendum $x = z$ & $x = 1 - z$, atque habebitur series, in qua sola remanebit z, quae ergo dabit claritatem

tem A, quae particulae M a cunctis ceteris adcrescit. Huic addendum lumen solare, quod erit (§. 961.)

$$= m.e^{-(1-z)\sec\omega:l}$$

similiterque lumen a tellure incidens, quod erit (§. cit.)

$$= nt\left(1 - \frac{z}{2l^2} + \frac{z^3}{2.2.3l^3} - \frac{z^4}{2.3.3.4l^4} + \&c.\right)$$

atque emerget series, quae si secundum dignitates ipsius z disponatur, coefficientes cum coefficientibus α, β, γ &c. comparari poterunt.

§. 974. Sit iam AB superficies telluris, ED superficies aeris depressi, utraque vero velut infinite extensa. Radii solares incidant secundum directionem CA, DB, sitque eorum quantitas extra aerem $=1$, dum in superficiem AB incidunt $= n$, erit quantitas eorum, qui in aere disperguntur $= 1 - n$. Ponamus, ut supra (§. 905.) dimidiam horum partem deorsum cadere in AB, erit summa radiorum duplici hoc respectu in AB incidentium $= n + (1-n):2 = \frac{1}{2}(1+n)$ Fig. 33.

§. 975. Quodsi iam albedo superficiei telluris sit $= A$ (§. 727.) erit $\frac{1}{2}A(1+n)$ quantitas radiorum reflexorum. Horum pars quaedam extra aerem recta emergit, nunquam in eum regressura, qua dicta $= m$, erit quantitas radiorum eorum, qui in aere disperguntur $= \frac{1}{2}A(1+n).(1-m)$. Horum pars dimidia iterum in telluris superficiem incidit, quae ergo est $= \frac{1}{4}A(1+n).(1-m)$

 §. 976.

§. 976. Huius quantitatis iterum a tellure reflectitur pars $\frac{2}{4}AA(1+n).(1-m)$, aerem recta egreditur pars $=\frac{1}{4}AA(1+n).(1-m)m$, in aere dispergitur pars $=\frac{1}{4}AA(1+n).(1-m)^2$, in tellurem recidit pars $=\frac{1}{8}AA(1+n).(1-m)^2$.

§. 977. Simili modo si sequentes computentur luminis residui reflexiones & dispersiones, erit tandem summa totius luminis, quo superficies telluris collustratur.

$$\Lambda=\tfrac{1}{2}(1+n)+\tfrac{1}{4}A(1+n).(1-m)+\tfrac{1}{8}A^2(1+n).(1-m)^2 + \tfrac{1}{16}A^3(1+n).(1-m)^3+\&c.$$

siue hac serie in summam contracta

$$\Lambda=\frac{1+n}{2-A(1-m)}$$

§. 978. Unitas, ad quam hoc lumen est referendum, est quantitas luminis solaris in CD incidentis. Cum ergo minuatur ut sinus altitudinis solis, unitatem istam ponemus esse eam quantitatem radiorum, quae normaliter incidit in CD. Quare dicto angulo EAC $=\gamma$, erit

$$\Lambda=\frac{(1+n)\text{cosin}\gamma}{2-A(1-m)}$$

Porro est

$$n=e^{-\text{sec}\gamma:\Omega}$$

Quare substitutione facta erit

$$\Lambda=\frac{(1+e^{-\text{sec}\gamma:\Omega}).\text{cos}\gamma}{2-A(1-m)}$$

§. 979. Quantitas m est in ratione radiorum emanantium, eorumque debilitationis, dum aerem percurrunt. Dicta quantitate absolute

solute emanantium $=\pi$, erit quantitas eorum qui emanant per conum, cuius latus est EAC $=\pi.\sin\gamma^2$ (§. 125.) quae si dicatur q erit

$$dq = 2\pi.\sin\gamma.d\sin\gamma.$$

siue

$$dq = \tfrac{1}{2}\pi d\cos 2\gamma.$$

adeoque

$$dm = \tfrac{1}{2}d\cos 2\gamma.e^{-\sec\gamma:\daleth}$$

$$m = \tfrac{1}{2}\int e^{-\sec\gamma:\daleth}\, d\cos 2\gamma.$$

§. 980. Diametro AC $=1$ insistat semicirculus ANC, compleatur quadratum ABDC, atque subtangente $=\daleth$ describatur logistica DEM. Ducta iam secante qualibet CQ, ut angulus QCA sit $=\gamma$, demittatur sinus NQ, atque facta CP $=$ CQ erectaque PM, compleatur rectangulum PMRK, erit punctum R in curua ERC, hoc modo construenda. Porro spatium totum ERCAE erit $=m$, adeoque Fig. 19.

ERCDB $=1-m$.

§. 981. Utrumque hoc spatium fere est aequale, si fuerit $\daleth=2$

Quare faciendo $m=1-m=\frac{1}{2}$, erit hoc casu

$$\Lambda = \frac{(1+e^{-\sec\gamma:2})\cos\gamma}{2-\frac{1}{2}A}$$

§. 982. Lumen solare directe in tellurem incidens est

$$\lambda = \cos\gamma.e^{-\sec\gamma:2}$$

quo ergo a priore subtracto, remanet lumen, quod ex aere in terram recidit

$$L = \frac{\cos\gamma - (1-\frac{1}{2}A)\cos\gamma.e^{-\sec\gamma:2}}{2-\frac{1}{2}A}$$

§. 983. Haec ergo erit claritas plani ab athmosphaera absolute illuminati, cum eiusdem claritas, dum a sole extra athmosphaeram collustratur, est $=1$. Dicta iam claritate solis $=1$, semidiametro disci $0°,16'$, erit claritas athmosphaerae media

$$\eta = l.(\sin 16')^2$$

siue

$$\eta = \frac{(\cos\gamma - (1-\tfrac{1}{2}A)\cos\gamma.e^{-\sec\gamma:2}).(\sin 16')^2}{2-\tfrac{1}{2}A.}$$

§. 984. Albedo superficiei telluris, nisi niue fuerit obtecta, vix est $\frac{1}{12}$. Posita ergo $A=\frac{1}{12}$, erit

$$\eta = \frac{(24-23.e^{-\sec\gamma:2}).\cos\gamma.(\sin 16')^2}{47}$$

Parum ergo hoc casu claritas athmosphaerae a lumine, quod telluris superficies reflectit, augetur. Notabilius erit hoc augmentum, si ponatur $A=\frac{2}{5}$, quod albedini niuis fere respondet. Erit enim iam

$$\eta = \frac{(1-0{,}8.e^{-\sec\gamma:2})\cos\gamma.(\sin 16')^2}{1{,}8}$$

§. 985. Ut quantitates l hinc emergentes cum iis conferri possint, quas supra (§. 908.) in tabella exhibuimus, ponemus quantitates $\lambda = \cos\gamma e^{-\sec\gamma:2}$ easdem, quas ibidem inuenimus.

Unde

Unde erit

altit.☉	λ	l	$`l$
90	0,5889	0,2225	0,2938
80	0,5752	0,2214	0,2915
70	0,5348	0,2182	0,2844
60	0,4698	0,2123	0,2723
50	0,3837	0,2034	0,2550
40	0,2820	0,1902	0,23[illegible]7
30	0,1734	0,1708	0,2007
20	0,0727	0,1390	0,1577
10	0,0082	0,0847	0,0928

§. 986. Columna prima hic iterum exhibet gradus altitudinis solis, secunda λ claritatem plani horizontalis unice a sole collustrati, tertia l claritatem eiusdem plani unice ab athmosphaera sed absolute illuminati, eo casu quo $A = \frac{1}{12}$, quarta denique eandem claritatem $`l$ cum est $A = \frac{1}{3}$, etsi hic casus, si altitudines solis spectes maiores, vix existat, nisi in montibus peruuianis & aethiopicis eum quaerere volueris. Unitas vero ad quam hi numeri referuntur eadem est, quae supra (§. 902. seqq.) claritas nempe eiusdem plani, cum a radiis solaribus extra athmosphaeram normaliter illuminatur. Ceterum cum numeri isti a subtangente 7 adeoque a pelluciditate athmosphaerae pendeant, me non monente patet, eos valde mutabiles esse, ut adeo haec tabella simili modo ac ceterae, quas in hac Photometriae parte dedimus, exempli ergo adiecta sit.

CAPVT III.

Traditur historia naturalis crepusculi, atque definitur, quo successu noctem detrudat dies, diemque nox.

§. 987. Ex quo antiquissimi astronomi densissimarum tenebrarum, quae noctu caelo terraeque incumbunt, primum initium, absolutumque finem per depressionem solis infra horizontem 18 vel 19 gr. determinarunt, atque inde altitudinem aeris lumen solare reflectentis deduxerunt eam, quae obtineret, si simplex tantum adesset reflexio, atque via luminis in aere esset rectilinea, ad pauca capita reducentur, quae hac in re porro peracta sunt. Primus est, quem noui, VARENIVS, qui duplicem admisit reflexionem, atque inde altitudinem aeris, quae ex unica reflexione prodierat fere 11 mill. germ. ad quartam partem depressit. Viam luminis in aere itidem posuit rectilineam, cumque & haec altitudo ipsi videretur nimia, rem omnem posteris ventilandam reliquit: Cel. HALLEIVS curuaturae viae rationem habuit, at unicam retinuit reflexionem, unde prodiit altitudo aeris $9\frac{1}{2}$ mill. germ. Computum quoque tradunt cel. SMITHIVS & KAESTNERVS in operibus iam passim laudatis. Cel. IO. BERNOVLLIVS diem breuissimi crepusculi definiuit, idemque problema uniuersalius absoluit Cl. KAESTNERVS, quod cum simpliciter pendeat a depressione solis infra horizontem, voto magis satisfacit, quam prius, quo definienda est aeris altitudo.

§. 988.

§. 988. Haec fere sunt, quae de crepusculo hactenus in lucem prodierunt, quaeque iam nostro more proponemus, ut inde ad cetera progredi liceat his superaddenda. Esto igitur problema primum: *Data eleuatione poli, quaeritur, quaenam sit declinatio sideris, quod breuissimo tempore ad datam altitudinem supra horizontem siue ad datam depressionem infra eundem pertingat.*

§. 989. Sit HZON meridianus, P, Q uterque polus, ADE aequator, HDO horizon, MSRL circulus aequatori parallelus, ipsique infinite vicinus msrl. Sit porro HC=OK depressio data, erit CSK circulus horizonti parallelus, ad quem sidus in parallelo LRSM incedens citissime perueniat. Fig. 90.

§. 990. Per puncta intersectionis R, S agantur meridiani PrRQ, PsSQ, tempus quo permeatur arcus RS erit ut angulus SPR, siue ut gradus, quos continet arcus rs. Quodsi vero iam sidus incedat in parallelo lrsm, patet idem tempus fore ut gradus arcus tv. Quare per naturam maximorum & minimorum uterque hic arcus debet esse aequalis. Erit ergo

$$rs = tv$$

$$tr = sv$$

Sed est

$$sS = rR$$

$$\text{ang. } vsS = trR = 90^\circ$$

unde triangula vsS, trR erunt aequalia & similia. Hinc ergo, demissis verticalibus ZSN, ZRN, erit

$$PSZ = PRZ = rtR = svS.$$

siue

$$NSQ = NRQ$$

Unde porro per theoremata trigonometrica, ob $NR = 90°$, & $QR = QS$, erit

$$\cos NQ = \sin QR . \cos NRQ$$

$$\cos NQ = \cos NS . \cos QS + \sin NS . \sin QS . \cos NRQ$$

Quare substitutione facta

$$\cos NQ = \cos NS . \cos QS + \sin NS . \cos NQ$$

unde

$$\cos QS = \frac{\cos NQ (1 - \sin NS)}{\cos NS}$$

siue breuissime

$$\cos QS = \cos NQ . \tan \tfrac{1}{2} SG$$

§. 991. *Erit ergo sinus totus ad sinum eleuationis poli, ut tangens dimidiae depressionis datae ad sinum declinationis sideris, quod tempore breuissimo ad eam depressionem pertingit.*

§. 992. Porro in triangulis PSZ, PRZ quae communi cruri PZ insistunt est

$$PS = PR$$

$$PSZ = PRZ$$

Quare erit

$$\sin SZP = RZP$$

Cum vero hi anguli haud coincidant, erit alter alterius complementum ad semicirculum, quare

$$SZP = RZE$$

$$HG = OR$$

$$GD = DR$$

Unde ergo verticales SZ, RZ, inter quos est via breuissimo tempore peragranda RZ, ab oriente vel occidente aeque distant.

§. 993.

§. 993. Similiter erit

$$\sin PZ : \sin PRZ = 1 : \sin ZPR = \sin ZS : \sin ZPS$$

adeoque

$$\sin ZPS = \sin ZPR . \sin ZS$$

Sed

$$\cos ZPR = \cot PZ . \cot PR.$$

Ex utraque ergo hac aequatione dabitur arcus semidiurnus Ec & duratio crepusculi cb.

§. 994. Porro cum sit

$$\text{ang. } aSb = cRd$$
$$Sab = Rcd$$
$$Sa = Rc$$

erunt triangula aSb, cRd aequalia & similia, unde

$$ab = cd$$
$$ac = bd$$
$$Sb = Rd$$

§. 995. Sed eodem modo ob

$$GD = DR \text{ (§. 992.)}$$
$$\text{ang. } GDb = dDR$$
$$bGD = dRD = 90^\circ$$

erunt triangula GDb, dDR aequalia & similia, quare

$$Db = Dd$$
$$Gb = Rd$$

At vidimus esse (§. 994.)

$$RD = Sb$$

Quare erit

$$Sb = Gb = \tfrac{1}{2} GS$$

Unde aequator EDbA depressionem sideris GS in b bisecat, ut adeo sit (§. 991.)

$$\sin aS = \cos PZ . \tan gbS$$

§. 996.

§. 996. Cumque porro sit

$ac = bd$ (§. 994.)

$Db = Db$ (§. 995.)

erit

$ac = 2bD$

Est ergo in triangulo GDb, hypothenusa dimidia duratio crepusculi, cathetus Gb dimidia depressio solis in fine crepusculi, cathetus alter GD dimidius arcus azimuthalis, angulus GDC eleuatio aequatoris, ut adeo hoc modo detur duratio crepusculi breuissimi independenter a declinatione solis, cum sit

$\sin Db = \sin Gb : \sin AH$

§. 997. Sit v. gr.

Eleuatio aequatoris $AH = 41°,37'$

depressio solis - $GS = 18, 30$

erit calculo absoluto (§. 991. 996.) tempore crepusculi breuissimi

declinatio solis meridionalis $Sa = 6°,59',36''$

arcus dimidiae durationis $Db = 14, 0,23$

arcus dimidii azimuthi $Gd = 10,34, 0$

Est ergo locus solis in ♎ $17°,47\frac{1}{2}$.

& duratio crepusculi $1^h,52',3''$.

Fig.91. §. 998. Sit iam CA semidiameter telluris, AD eius superficies, AB altitudo aeris lumen reflectentis, BD eius superficies. Radii solis incidant per rectam SD, in D incuruetur via, ut lumen pergat per DE, atque in E superficiem telluris tangat, pergat porro per EF, atque in F aerem iterum egrediatur. Erit ergo F particula extrema earum, quae a sole directe collustrantur. Ponamus a particula F lumen ita reflecti, ut radius quidam percurrat viam FA, quae in A iterum superficiem telluris tangat, erit A punctum superficiei telluris extre-

extremum, in quo pars athmosphaerae directe collustratae FD conspicua est, atque in toto tractu AE erit crepusculum, quod *primarium* vocabimus.

§. 999. Radius FA pergat per AG atque in G athmosphaeram egrediatur, erit G ultima athmosphaerae particula, quae a radiis semel reflexis collustratur, atque in tractu HG erit crepusculum, quod nobis hic secundarium est. Simili modo concipi poterit crepusculum tertium, quartum &c.

HA

§. 1000. Ductis tangentibus DK, FL, FM, GN, in eas e centro telluris demittantur normales CK, CL, CM, CN, CP, atque anguli KCE, ECL, MCA, ACN, PCH aequales erunt curuaturae viae luminis DE, EF, FA, AG, GH, ipsamque refractionem astronomicam referent, simul ac assumamus, altitudinem aeris reflectentis & refringentis esse eandem, quod quidem absque notabili errore statuere licebit. Porro ratio inter rectas CK : CE = CL : CE = CM : CA = CN : CA = CP : CH erit ea quae est inter sinus anguli inclinationis & refractionis, dum lumen ex spatio ab aere vacuo incidit in aerem, qui est in E, A, H, hancque rationem alibi inuenimus esse = 1,0003054 : 1. Cum vero variabilis sit, eam ponemus = 1,0003 : 1.

§. 1001. Quodsi iam depressio solis initio crepusculi sit $= 18\frac{1}{2}°$, atque ponamus particulam F esse extremam earum quae in horizonte luminosae videntur, erit angulus ACK = 18°,30′, adeoque

$$2MCF + 3ACM = 18^\circ,30'$$

$$MCF = \frac{18^\circ,30' - 3ACM}{2}$$

Dicta porro AC=1, erit AM=1,0003, atque

$$CB = 1,0003.\sec MCF.$$

Assumta iam refractione horizontali ACM =0°,32′, erit

$$MCF = \frac{18^\circ,30' - 1^\circ,36}{2} = 8^\circ,27'$$

$$\sec MCF = 1,01097$$
$$CB = 1,01127$$
$$AB = 0,01127 = \tfrac{1}{89}.AC = 9,6 \text{ mill.germ.}$$

§. 1002. Contra ea si particula G sit ultima, quae in crepusculo videtur, erit angulus HCK=18°,30′, adeoque

$$4MCF + 5ACM = 18^\circ,30'$$
$$MCF = 3^\circ,57\tfrac{1}{2}'$$
$$\sec MCF = 1,00239$$
$$CB = 1,00269$$
$$AB = 0,00269 = \tfrac{1}{372}.AC = 2\tfrac{1}{3} \text{ mill.germ.}$$

§. 1003. Ponamus iam solem esse immotum in S, atque videamus quaenam videatur esse claritas athmosphaerae, dum a loco E versus A, H procedimus. Spectator itaque in E positus in D videt solem occiduum vel orientem, aeremque FD, qua late patet, a radiis solaribus directe collustratum, ita tamen, ut in D longe sit clarior quam in F.

§. 1004. Recedendo in L, pars quaedam aeris clarioris, qui in D est, ipsi veluti occidit, contra ea eleuatur extremitas F, ut adeo in horizonte ibidem videat aerem, qui nonnisi a

parti-

particulis aeris crepusculi primarii collustratur, quique adeo notabiliter est obscurior.

§. 1005. Dum peruenit in Q extremitas crepusculi primarii F vertici imminet, quae non potest non esse admodum obscura, ob breuitatem rectae QF. At vero aliquanto augetur haec claritas, cum aer, qui est in spatio QEF a toto fere spatio FK collustretur.

§. 1006. Recedendo in R, protenditur recta RF, ut adeo terminus crepusculi primarii & distinctior & clarior videatur. Paullatim tamen, ulterius recedendo cum crepusculo secundario confunditur, quod solum remanet, cum spectator peruenit in A.

§. 1007. Lumen solare curuam DE percurrendo debilitatur fere in ratione 2000 : 1, adeoque percursa tota via DF debilitatum erit in ratione 4000000 : 1, quare illud lumen, quod in extremitatem F directe incidit, decies fere debilius erit lumine lunae plenae puncto F verticaliter imminentis. Quare vera extremitas crepusculi primarii F vix ac ne vix visibilis est. Unde ea quae videtur erit inter F & L. Extremitatem crepusculi secundarii G longe adhuc minus esse visibilem, hinc facile patet, atque ad summum videbitur eius medium B, cum solum in horizonte remanet. Hoc enim ab illo offundi, cum spectator est in Q vel in R, ex notabili claritatis differentia tuto colligitur.

§. 1008. Sit AFB circulus verticalis, in quo est sol, AB horizon, F vertex, ut AFBD referat hemisphaerium coeli superius, quale patet spectatori in centro C constituto, atque in hoc Fig. 92.

iam

iam deſcribam crepuſculi variationes, quales eas veſpere d. 19. Novembris 1759. *Auguſtae Vindelicorum* e ſpecula inſignis Mechanici G. F. BRANDER obſeruaui.

Hora min.

IV 26. occidit ſol in B.

— 29. adparens eius occaſus, initium crepuſculi primarii, depreſſio ſolis 0°, 33'.

— 36. Caelum in oriente A prope horizontem obſcureſcit, parum tamen adhuc minuitur claritas diurna.

V 0. Irruit nox celeri paſſu. Conſpicuae ſunt fixae orientales, & Iuppiter a meridie recedens.

— 5. Caelum orientem verſus uſque in verticem F tenebris obtectum. Micant ſtellae orientales.

— 12. Tenebrae ſeſe diffundunt ultra verticem, atque in H fere dignoſcuntur earum limites, haud tamen ita, ut ſumi poſſit altitudo culminis crepuſculi.

— 19. Abſque dubitatione diſcernitur culmen crepuſculi in E; Figura eius fere circulum ſphaerae maximum ED refert, cum amplitudo horizontalis DB ab utraque parte circuli verticalis AFB ad 90 gradus excurrat. Altitudo culminis EB eſt $=8°, 30'$, depreſſio ſolis $=8°, 3'$.

— 25. Altitudo culminis $EB=7°, 15'$. depreſſio ſolis 8°, 59'
amplitudo DB eadem.

Hora

Hora min.

V 31	altitudo culminis EB=7°, 0′		
	depressio solis	- -	9°,55′
— 35	altitudo culminis EB=6,20		
	depressio solis	- -	10, 42
— 43	altitudo culminis EB=5,45		
	depressio solis	- -	11, 48
— 48	altitudo culminis =5, 0		
	depressio solis	- -	12, 35
	minuitur amplitudo		
— 54	altitudo culminis EB=4,30		
	depressio solis	- -	13, 31
— 59	altitudo culminis =3,40		
	depressio solis	- -	14, 18
VI 4	altitudo culminis =3,15		
	depressio solis	- -	15, 5

amplitudo I B vix est quadraginta graduum. Paullatim quoque crepusculum miscetur lumini zodiacali, unde hanc ob caussam & ob frigus intensius abrupta est obseruatio.

§. 1009. Ceterum notandum altitudines EB potius esse debite maiores quam vero minores, quod factum est, quo magis ad veram eius altitudinem accederem.

§. 1010. Sit iam AC semidiameter telluris, Fig. 93. AK eius superficies, HD superficies aeris lumen reflectentis, tempore occasus solis adparentis terminus crepusculi est in B. Terminus hic successiue progreditur in H, D, atque facile patet angulum BCD aequalem esse depressioni solis sub horizonte, quippe ab hac pendet crepusculi progressus. Ponamus iam culmen crepusculi fuisse in D hora V. min. 19, erit eius altitudo DAK=8°,30′, depressio solis

 respon-

respondens $= 8°,3'$, a qua subtrahatur depressio tempore occasus adparentis $0°,33'$, erit

$$BCD = 7°,30'.$$

§. 1011. Ductis tangentibus BF, DG, AE, ad eas demittantur normales CF, CG, CE, erit

	$ECA = 8°,30'$
refractio	$ECG = 0\,,\,6$
unde	$GCA = 8\,,24$
Porro	$BAC = 90,\,0$
refractio	$FCA = \;0,33$
	$GCF = \;7,51$

§. 1012. Dicta iam $AC = 1$, erit (§. 1000.)

$$CF:CA = CG:CE = 1,0003054:1$$
$$CE = \cos ECA = 0,9890158$$
$$CG = 0,9893178$$
$$CF = 1,0003054$$

§. 1013. Porro cum sit

$$BCF + GCD = BCD + GCF = 15°,17'$$

datur summa angulorum BCF, GCD & ratio inter cathetos CF, CG utriusque trianguli rectanguli CBF, CDG, quorum hypothenusae CB, CD sunt aequales, erit ergo

$$\text{tang}BCF = \frac{CG - CF\cos(BCF + GCD)}{CF.\sin(BCF + GCD)}$$

unde subducto calculo habetur

$$\text{tang}BCF = 0,092498$$
$$BCF = 5°,17$$
$$GCD = 10\,,\,0$$

§. 1014. Est vero

$$CB = CF.\sec BCF$$

Quare erit

$$CB = 1,0045735$$
$$AH = 0,0045735 = \tfrac{1}{220}.AC = 3,9 \text{ mill.germ.}$$

Quae

Quae ergo ex hoc computo est altitudo aeris lumen reflectentis.

§. 1015. Cum sit

BCF = 5°,17′
FCA = 0, 33
BCD = 7, 30

erit

BCA = 5, 50
ACD = 2, 40

At vero depressio solis tempore occasus adparentis est 0°,33′, quare eo tempore, quo terminus vel culmen crepusculi est in vertice H, depressio ista erit = BCA + 0°, 33′ = 6°, 23′, quae in nostra obseruatione obtinuit hora Vta, 8 min.

§. 1016. Ob BCH = HCL = 5°,50′, erit BCL = 11°,40′, adeoque terminus crepusculi primarii occidit, cum depressio solis sub horizonte est = 11°,40′ + 0°,33′ = 12°,13′. At vero depressio solis in fine crepusculi est = 18°,30′ quare cum differentia sit 18°,30 — 12°,13′ = 6°,17′, haec erit distantia termini crepusculi primarii & secundarii. Erit itaque Fig.91.

ECD = 5°,50′
FCD = 11, 40

unde cum ipsi FCD addendum sit 6°,17′, terminus ultimus crepusculi secundarii cadet fere in N, ut adeo reliqua eius pars NG visum effugiat, quippe adeo est tenue, ut a lumine, quod stellae fixae in athmosphaera diffundunt obscuretur.

§. 1017. Claritas aeris v. gr. in recta RF eo maior est, quo plures in ea sunt particulae lumen diffundentes quoque clariores fuerint.

Quantitas particularum augetur, imminuto angulo RFQ. Hinc iam ſequens explicatur utriuſque crepuſculi analogia & differentia.

§. 1018. Primarium, cum non modo a radiis ſolaribus directe illuſtretur, verum & ab omnibus particulis in LT ſitis iiſque longe clarioribus lumen quoddam accedat, veluti per ſe ſpectabile eſt, unde eius viſibilitas a longitudine rectae RF minus pendet, etſi eius claritas una cum iſta recta creſcat.

§. 1019. Contra ea viſibilitas crepuſculi ſecundarii fere abſolute pendet a longitudine rectae RF, per quam videtur. Hinc enim fit, ut nonniſi prope horizontem ſpectabile ſit, atque ibidem paullatim miſceatur primariò ad occaſum properanti.

Fig. 94. §. 1020. Figura crepuſculi primarii, cuius limbum ſemicirculum ſphaerae maximum videri diximus, mere eſt optica. Sit ADBE ſuperficies athmoſphaerae lumen reflectentis, ſol immineat puncto A, occidet in circulo DE, ſi iſte ſit in ſuperficie athmoſphaerae, & ob refractionem occidere videbitur in circulo de ipſi DE parallelo, ſi uterque concipiatur eſſe in ſuperficie telluris, eritque arculus dD$=0°, 33'$.

§. 1021. At ob pelluciditatem athmoſphaerae radii ſolares adhuc directe pertingent in circulum FG, qui adeo eſt terminus crepuſculi primarii, atque a circulo d e diſtat $5°, 50'$ (§. 1015.) ut adeo ſit FD$=6°, 23'$.

§. 1022. Terminus crepuſculi ſecundarii cadit in circulum HI prioribus itidem parallelum,

lelum, estque HF=6°,17′ (§. 1016.) adeoque HD=12°,40′.

§. 1023. At iam arcus athmosphaerae BH, (fig. 93.) quem videt spectator in superficie telluris A est =BCA=5°,50′ (§. 1015.) Sit ergo (fig. 94.) spectator in C, semidiametro CK=5°,50′ e polo C describatur circulus PKL, huius peripheria erit horizon visibilis spectatori, cui verticaliter imminet punctum C, atque arcus KL circuli FKLG erit limbus crepusculi primarii quem videt, cumque ultra 12 gradus non excurrat fere rectilineus erit. At vero eius imago eandem figuram circularem adfectat, quam adfectare videmus totam caeli faciem.

§. 1024. Assumta iam (§. 1014.) Fig. 93.

BC=BH=1,0045735

BH=0,0045735

facile per angulos HCD dabuntur anguli HAD atque inde definietur, quanam ratione culmen crepusculi D a vertice H recedere & ad eum accedere videatur. At cum operae pretium non sit rem istam calculo trigonometrico absoluere, eam constructione peregi. Porro assumendo crepusculum primarium esse claritatis constantis eiusque limbum circulum sphaerae maximum, per theorema XII. (§. 145.) quaesiui illuminationem plani horizontalis crepusculo debitam, quae cum sit =1 ± sin HAD, dicta altitudine culminis DAK=*a*, erit illuminatio =1±cos*a*, atque hinc facile enata est tabella sequens

I	II	III	IV	I	II	III	IV
tempus min.	depressio ☉	alt. crep. orient.	illuminatio	tempus min.	depressio ☉	alt. crep. occid.	illuminatio
0	0, 0	- -	- -	42	6,23	0, 0	1,000
3	0,33	0, 0	2,000	43	6,32	60, 0	0,500
17	2,36	2,45	1,999	44	6,41	41,30	0,251
22	3,21	3, 0	1,998	45	6,50	29,30	0,130
27	4, 5	5,30	1,995	46	7,59	22,30	0,075
32	5,50	8,30	1,989	47	7, 9	17,45	0,045
33	5, 1	10, 0	1,985	48	7,18	15,30	0,036
34	5,10	11,30	1,980	49	7,27	13, 0	0,026
35	5,19	13, 0	1,974	50	7,36	11,30	0,020
36	5,28	15,30	1,964	51	7,45	10, 0	0,015
37	5,37	17,15	1,955	52	7,54	8,40	0,011
38	5,46	22,30	1,924	57	8,41	5,30	0,005
39	5,56	29,30	1,870	62	9,27	3, 0	0,002
40	6, 5	41,30	1,749	67	10,14	2,45	0,001
41	6,14	60, 0	1,500	81	12,13	0, 0	0,000
42	6,23	0, 0	1,000				

§. 1025. Tempus quod prima huius tabellae columna exhibet, sunt minuta, quae die 19 Novembris post occasum solis praeterfluxerunt, unde ad omnes anni dies extendi nequit. Hanc ob caussam secunda columna adiecta est, quae depressionem solis sub horizonte cuique altitudini crepusculi respondentem exhibet. Haec enim ab illa unice pendet. Ex quarta columna patet instantaneam fere esse noctis irruptionem, cum sol a sexto gradu ad septimum infra horizontem delabitur. Tempus vero, quo sol sub eleuatione poli 48°,23′, ad profunditatem 6°,23′ peruenit ab occasu astronomico computatum, est

pro

		h ′ ″		′ ″
pro	o ♋	0, 51, 38	hora	8, 48, 45
	o ♑	0, 45, 42	- -	4, 48, 35
	o ♈ ♎	0, 38, 32	- -	6, 38, 32

§. 1026. Etsi numeri quartae columnae veram illuminationem plani horizontalis non exhibeant, haud tamen ita a vero recedunt, ut tempus, quo citatiori passu irruunt densiores tenebrae, differat ab eo quod indicat tabella, quodque depressioni solis $= 6\frac{1}{2}°$ respondet. Attendenti facile hoc quotidiana patebit experientia.

§. 1027. Terminus crepusculi secundarii ad verticem properat, primario occidente, quare cum simili gressu progrediatur, tunc altera priori superaccedit nocturna caligo, vix tamen facile distinguenda. Absoluta euadit, secundo hoc crepusculo sub horizontem labente.

§. 1028. Progressus crepusculi primarii pendet ab altitudine aeris AH. Quodsi haec assumeretur, qualem eam supra ex unica reflexione deduximus (§. 1001.)

$$AH = 0{,}01127.$$

longe lentius crepusculum perueniret in H, quippe ipso die, quo eius duratio breuissima est, fere horam integram impenderet (§. 997.) At vidimus hoc fieri tempore $38\frac{1}{2}$ minutorum (§. 1025.) Contra ea si sumatur altitudo $AH = 0{,}00269$ (§. 1002.) crepusculum primarium tempore 14 minutorum post solis occasum vertici immineret. Utrumque ab experientia quotidiana abhorret, unde altitudo aeris lumen reflectentis, quam ex nostro com-

puto inuenimus esse $= 0,0045735$ siue fere 4 mill. germ. ad verum longe propius accedit.

§. 1029. Celerrima noctis irruptio pendet a celeritate, qua terminus crepusculi verticem H percurrit, adeoque a celeritate maxima, qua sol, cum $6°,23'$ infra horizontem haeret, deprimitur. Quaeramus quo die anni hoc obtineat. Sit

distantia poli a vertice $= a$
distantia sideris a polo $= y$
eiusdem distantia a vertice $= z$
eiusdem elongatio a meridie $= x$

erit

$$\cos z = \cos y . \cos a + \sin y . \sin a . \cos x$$

fluant x & z, differentiando habetur

$$\sin y . \sin a . \sin x . dx = \sin z . dz$$

unde ob

$$\sin x = \surd(\sin y^2 . \sin a^2 - (\cos z - \cos y . \cos a)^2) : (\sin y . \sin a)$$

erit

$$\sin z . dz = dx \surd(\sin y^2 \sin a^2 - (\cos z - \cos y . \cos a)^2)$$

fluente iam dx & y erit

$$d(\sin z . dz : dx) = 0 =$$

$$[\sin a^2 \sin y . \cos y . dy - (\cos z - \cos y . \cos a) \cos a \sin y . dy] : [\surd(\sin y^2 . \sin a^2 - (\cos z - \cos y . \cos a)^2)]$$

adeoque

$$\sin a^2 \cos y - \cos a . \cos z + \cos y \cos a^2 = 0$$

$$\cos y = \cos a . \cos z .$$

His

Debet ergo sol esse in circulo verticali, qui aequatorem in horizonte intersecat, siue eius azimuth erit $=90°$. Porro *Ut se habet sinus totus ad sinum eleuationis poli, ita se habebit sinus depressionis solis* $6°, 23'$ *ad sinum declinationis solis ab aequatore, quae hoc casu australis est.* Sub elevatione poli 48°,23 haec declinatio est $=4°,46$, atque cadit in 12°,2',22" ♎ & 17,57,38 ♓. siue in 5. Octobris & 7. Martii. His ergo fere diebus nox celerrime irruit.



PHOTOMETRIAE
PARS VI.
QVA CALCVLO SVBIICITVR ILLVMINATIO SYSTEMATIS PLANETARII.

CAPVT I.
Calculo perueſtigantur modificationes luminis lunaris.

§. 1030.

Quam iam ingredimur prouinciam, eam in ſe ſuſceperunt geometrarum plurimi, quos inter Cel. THVMIGIVS, SMITHIVS, KIESIVS, EVLERVS, BOVGVER ſupra iam paſſim laudati Cel. THVMIGIVS potiſſimum denſitatem luminis ſolaris normaliter in planetas primarios incidentis calculo proſequutus eſt, eamque poſuit eſſe reciproce ut quadratum diſtantiae, unde ratum eſſe eius calculum, ſi ſinguli planetae eadem *albedine* gaudere ſtatuantur, ſupra iam notauimus (§. 117.) Cel. KIESIVS in *Commentariis Academiae Regiae Berolinenſis* varios iſtos caſus examinauit, quibus *Veneris* ſplendor maximus eſt, diſtinctionem tamen inter claritatem viſam & illuminationem praetermiſiſſe videtur, quod & ab aliis factum eſſe ſupra diximus (§. 37. 73.) Experimentis rationem inter claritatem ſolis &lu-

& lunae plenae definiuit Cel. BOVGVER, eamque esse statuit ut 300000 ad 1. Duplici quoque raticinio eandem quaesiuit Cel. SMITHIVS, eamque, posita lunae albedine absoluta, inuenit esse =90900 : 1, lumen phasium lunae decrescere ponit in eadem ratione, qua decrescit latitudo phaseos in disco lunari. Rationem istam quadruplo maiorem siue =374000 : 1 ex suis principiis inuenit Cel. EVLERVS, in scripto iam supra laudato (§. 71.) Uterque claritatem visam & illuminationem confundit, atque ab angulo emanationis animum abstrahit.

§. 1031. Ex nostris ergo principiis, quae specialiora sunt, atque experimentis omnimode firmata, rem istam absoluere propositum est, eumque in finem sequentia, quae generaliora sunt, praestruemus.

§. 1032. Obseruationibus astronomicis constat figuram planetarum ad sensum esse sphaericam, Joue excepto, cuius figura a sphaerica notabilius differt. Porro constat eorum superficies esse asperiores, corporibusque terrestribus, quae opaca sunt lumenque dispergunt, valde similes. Diuersi quoque coloris esse planetarum corpora vel simplici obtuto patet. Pallet Saturnus, albicat Jupiter, rutilat Mars, albidiore lumine micat Hesperus, coruscat Mercurius, flauet Luna. Diuersi claritatis gradus non modo ab eorum a sole distantia, verum & ab ipsa albedine corporum planetarum pendent. Contra ea diuersus color unice inde est, quod corpora ista radiorum diuersi coloris alios copiosius reflectant, alios maiori copia absorbeant.

§. 1033.

§. 1033. Hinc ergo sequitur, lumen planetarum eodem calculo esse prosequendum, quem in superioribus corporibus opacis minusque politis adplicauimus, atque pro quouis planeta peculiarem assumendam esse albedinem siue rationem inter lumen incidens & reflexum. Unde ergo facilius comparabuntur eiusdem planetae diuersae phases, quam vero eaedem phases planetarum diuersorum inter se.

§. 1034. Porro constat obseruationibus teloscopicis lunam ceterosque planetas scatere maculis, diuersasque superficiei potissimum lunaris partes diuersa claritate gaudere, dari in ista montes, valles atque cauitates plurimas, quae umbram lumini miscent, ipsas maculas esse alias aliis obscuriores, locaque non maculosa claritate inter se differre, dari in luna montes aliaque loca nitidiori lumine micantia, aliaque veluti omni nitore destituta.

§. 1035. Irregularitates istae calculum mirum in modum redderent complexum, si ad singulas minutias attendere oporteret. At medium quoddam in his tenere propositum est. Etenim a montibus vallibusque animum abstrahere licet, quippe ab hisce luminis solaris in totam lunae superficiem incidentis quantitas non turbatur, cum ad totam superficiem habeant rationem fere incommensurabilem. Quod porro ad diuersam singularum partium claritatem attinet, ex singulis istis mediam assumere licebit, quam simpliciter *albedinem planetae* vocabimus.

§. 1036.

§. 1036. Quodſi porro planetam quendam circumfluat athmoſphaera, alio inſuper modo turbatur luminis calculus, a quo tamen in ſequentibus animum abſtrahemus, cum in his nil certi ſtatui poſſit. Athmoſphaeram, quam lunae tribuerunt plurimi, valde dubiam eſſe, ſolidioribus rationibus adſtruxit Cel. T. MAYER, cui pleniorem motuum lunarium computum debet eruditus orbis.

§. 1037. Porro vel ex ſuperioribus conſtat, qua ratione turbetur lumen planetarum, dum athmoſphaeram telluris tranſit. Unde eius utique habenda eſt ratio, ſi lumen planetarum experimentis inter ſe conferre quis voluerit. Hic vero ab iſto diſcrimine animum abſtrahere licet.

§. 1038. Denique claritas viſa planetarum duplici modo pendet ab ipſo oculo. Variatio aperturae pupillae eam reddit variam, atque hanc ob cauſſam luna minus clara videbitur, cum minor ſit apertura oculi lunam intuentis, ac eſt, cum intuetur planetas, luna ſub horizonte latente. Porro cum planetarum diametri adparentes adeo ſint parui, eorum imago in retina oculi maius ſpatium occupat, ac occupare deberet, ſi oculus eſſet perfecte presbita, nullique radii in aere diuergerent. Hanc vero ob cauſſam ceteris licet paribus obſcurior videbitur planeta, quo minor eſt eius diameter adparens, quoque magis oculus eſt myops.

§. 1039. Sit iam AFBG luna vel alius planeta, C eius centrum, concipiatur planum per centra ſolis telluris atque lunae tranſiens, atque Fig. 95.

que

que in hoc plano sit circulus maximus FDG. Recta CE iungat centra lunae atque telluris, recta vero CD centra solis & lunae, ita ut tellus immineat puncto E, sol vero puncto D, quod sit in medio semicirculi FDG, atque erit FAGB hemisphaerium lunae a sole collustratum. Sint A, B poli circuli FDG, ex his ducantur circuli AEB, ADB per puncta E, D, atque duo alii quicunque sed infinite vicini AMB, AmB. Jam quaerenda sit claritas media sectoris sphaerici AFBMA e tellure visa.

§. 1040. Sumto arculo Pp, ducantur ex polo A paralleli pq, PQ, atque definienda est spatioli PpqQ tum illuminatio tum magnitudo adparens. Quare fiat semidiameter lunae CE $=1$

$$AP = x \qquad FE = a$$
$$FM = y \qquad EM = y - a$$

eritque spatiolum

$$PQqp = dy.\sin x.dx.$$

Huius vero magnitudo adparens decrescit ut

$$\cos EP = (\cos a.\cos y + \sin a.\sin y)\sin x$$

quare si magnitudo ista adparens dicatur $= ddz$, erit

$$ddz = dx.\sin x^2(\cos a.\cos y\, dy + \sin a.\sin y.dy)$$

Posita iam y & dy const. erit

$$dz = \tfrac{1}{2}(x - \tfrac{1}{2}\sin 2x).(\cos a.\cos y\, dy + \sin a\, \sin y\, dy)$$

Sed posita x const. erit addita debita constante

$$z = \tfrac{1}{2}(x - \tfrac{1}{2}\sin 2x).(\sin(y-a) + \sin a)$$

Quae est magnitudo adparens segmenti IAP.

§. 1041.

§. 1041. Lumen in ſpatiolum PQqp incidens eſt ut coſin DP = ſin y. ſin x. cum decreſcat ut ſinus incidentiae, quare dicta ſemidiametro ſolis adparente, cum e luna videtur = s, albedine lunae = A (§. 1035. 727.) claritate ſolis = 1, erit claritas particulae ſiue ſpatioli PpqQ = A. ſin y. ſin x. ſin s². (§. 109. 137. 767.)

§. 1042. Ut vero habeatur ſumma claritatum viſarum, atque ex iis ſumi poſſit media, claritas iſta multiplicanda eſt per magnitudinem ſpatioli adparentem ddz, quare dicta iſta ſumma = q, erit

$$ddq = A \sin s^2 . \sin x^3 . dx (\cos a . \cos y . \sin y\, dy + \sin a . \sin y^2 . dy)$$

Quae formula eodem modo integratur ac praecedens, erit ergo ſumma claritatum ſpatii IAP

$$2q = \left(\tfrac{2}{3} - \cos x + \tfrac{1}{3} \cos x^3\right) . \left(y \sin a + \sin y . \sin (y-a)\right) A . \sin s^2$$

§. 1043. Quodſi iam ſumantur ſectores integri AFBMA, erit

$$x = 180^\circ = \pi, \sin x = 0, \cos x = -1. \text{ unde}$$

$$z = \tfrac{1}{2}\pi (\sin (y-a) + \sin a)$$

$$q = \tfrac{2}{3}(y . \sin a + \sin y . \sin (y-a)) . A \sin s^2$$

§. 1044. In plenilunio eſt $a = 90^\circ$, unde pro quolibet ſectore erit hoc caſu

$$z = \tfrac{1}{2}\pi (1 + \cos MG)$$

$$q = \tfrac{2}{3}(FM + \sin MG . \cos MG) A . \sin s^2$$

§. 1045. Denotet iam ſector AFBMA phaſin lunae integram, erit

$$EM = y - a = 90^\circ$$

$$\sin EM = 1$$

$$FM = a + 90^\circ = a + \tfrac{1}{2}\pi = \pi - ED$$

$$\sin FM = \cos a = \sin ED.$$

Eſt

Eſt vero ED diſtantia lunae ab oppoſitione. His ergo valoribus in formulis §. 1043. ſubſtitutis, erit

$$z = \tfrac{1}{2}\pi(1 + \cos ED)$$

$$q = \tfrac{2}{3}(\cos ED(\pi - ED) + \sin ED).A.\sin s^2$$

§. 1046. Habetur autem claritas phaſeos totius media ſi ſumma claritatum q per z diuidatur. Dicta ergo claritate media $= \eta$, erit

$$\eta = q : z$$

§. 1047. Ponatur $\pi - ED = v$, erit v diſtantia lunae a ſole ſiue a coniunctione, quare hoc valore ſubſtituto habebitur

$$z = \tfrac{1}{2}\pi(1 - \cos v)$$

$$q = \tfrac{2}{3}(\sin v - v.\cos v)A.\sin s^2$$

unde

$$\eta = \frac{4(\sin v - v\cos v)A.\sin s^2}{3\pi(1 - \cos v)}$$

Quae adeo eſt claritas phaſeos viſa media. Facili vero ſubſtitutione facta habebitur

$$\eta = \left(\frac{4\cot\tfrac{1}{2}v}{3\pi} - \frac{4v\cot v.\cot\tfrac{1}{2}v}{3\pi}\right)A.\sin s^2$$

§. 1048. Pro plenilunio eſt $v = 180° = \pi$, $\sin v = 0$, $\cos v = -1$, adeoque

$$\eta = \tfrac{2}{3}.A.\sin s^2$$

Quodſi ergo ponamus albedinem lunae A eſſe $= \tfrac{1}{4}$, ſemidiametrum $s = 0°, 16'$ erit

$$\eta = \tfrac{1}{6}(\sin 16')^2$$

adeoque

$$\eta : 1 = 1 : 277000$$

toties ergo claritas ſolis claritatem plenae lunae mediam ſuperaret, ſi aſſumta albedo $A = \tfrac{1}{4}$ vera eſſet. Etſi vero haec ratio ab ea quam Cel.

Cel. BOVGVER experimentis definiuit, quamque medium sumendo posuit esse numero rotundiori $=1:300000$, parum differat, atque insuper coincidat cum placitis cel. SMITHII, qui claritatem lunae claritati caeli sudi mediae ponit aequalem, quam supra (§. 914.) plane eandem inuenimus: attamen claritas lunae mea quidem sententia minor est. Etenim albedo $A=\frac{1}{4}$, quam ipsi hic tribuimus admodum est notabilis. Vidimus supra albedinem cerussae tantum esse $\frac{2}{5}$ (§. 754.) unde albedo lunae media dimidiam eius partem excederet. Quodsi ergo perpendamus lunam magna ex parte maculosam esse, oporteret partes clariores albedine cerussa parum essent inferiores, quod quidem vix ac ne vix concedi poterit, licet natura corporum lunarium plane nos lateat. Etsi porro valor ipsius $A=\frac{1}{4}$ fere cum eo congruat, quem in experimento XXIX (§. 757.) pro charta flaua inuenimus, attamen rationem iam reddidimus (§. 763.) cur hoc casu maior fuerit haec quantitas. Haec vero ratio corporibus lunaribus vix erit adplicabilis.

§. 1049. Experimentum BOVGVERIANVM instaurandi hactenus mihi defuit opportunitas, unde verum ipsius A valorem hic in dubio relinquens, ad ea reuertar, quae certiora sunt. Cum enim valor iste claritates singularum phasium eodem modo augeat, facile patet, eas inter se independenter ab isto valore comparari posse.

§. 1050. Insuper & hoc notabimus, $A \sin s^2$ esse claritatem puncti D, siue claritatem plenae

lunae centralem, ut adeo quid ſibi velit hoc modo oculis ſubiiciatur. Quodſi hanc claritatem claritati telluris a ſole normaliter colluſtratae aequalem ponere volueris, quod in ſua demonſtratione tacite ſuppoſuit cel. SMITHIVS, hoc ipſo albedinem lunae & telluris pones eſſe eandem, quod quidem haud ita liquido conſtat. Claritatem vero iſtam iam ponemus $=1$, atque per eam claritatem praecipuarum phaſium mediam ex formula §. 1047. computatam in tabella ſequente ob oculos ponemus.

Elongatio ☽ a ☉ v	claritas phaſeos viſa media η	Elongatio ☽ a ☉ v	claritas phaſeos viſa media η
0°	0,0000	90°	0,4244
10	0,0494	100	0,4657
20	0,0986	110	0'5048
30	0,1475	120	0,5413
40	0,1959	130	0,5747
50	0,2437	140	0,6043
60	0,2907	150	0,6294
70	0,3366	160	0,6490
80	0,3814	170	0,6619
90	0,4244	180	0,6666

§. 1051. Numeri huius tabellae claritatem phaſium viſam exhibent, & unitas, ad quam referuntur, eſt claritas plenae lunae centralis, ſiue claritas viſa eorum locorum, in quae radii ſolares normaliter incidunt, eaque ex cunctis media. Haud ergo pendent a diſtantia lunae

lunae geocentrica (§. 794) ſed vel maxime a diſtantia ſolis, quippe unitatem poſuimus eſſe A. ſin s^2, ut adeo unitas aſſumta pluribus modis variabilis ſit.

§. 1052. Quodſi enim eandem phaſin, v. gr. plenilunium ſpectes, huius claritas mutationem ſubibit annuam, quippe una cum tellure luna in aphelio telluris ſoli propior eſt ac in perihelio. Unde eadem lunae phaſis hieme trigeſima circiter parte clarior erit quam aeſtate.

§. 1053. Porro manente telluris a ſole diſtantia, unitas aſſumta minor erit in plenilunio ac in nouilunio, cum luna plena magis a ſole diſtet quam noua. Ponamus tellurem & lunam eo tempore quo utraque circum proprium axem voluitur, aequale ſpatium in orbita ſua emetiri, quod etſi demonſtrari nondum poſſit, a vero tamen vix aberrabit. Motus vertiginis lunae abſoluitur menſe periodico, telluris vero unius diei decurſu, quare peripheria orbitae lunaris aequalis erit arcui diurno orbitae telluris medio, atque diſtantia lunae a tellure media ad mediam telluris a ſole diſtantiam erit ut tempus unius diei naturalis medii ad tempus anni, adeoque fere ut 1 ad $365\frac{1}{4}$. Singularis haec poſitio forſan a motu vertiginis lunae non minus ſingulari pendet digna certe quae curatius examinetur.

§. 1054. Erit ergo diſtantia heliocentrica plenilunii ad eam nouilunii ut $364\frac{1}{4}$ ad $366\frac{1}{4}$, quare cum unitas aſſumta decreſcat reciproce ut quadrata diſtantiarum a ſole, dicta unitate iſta

pro quadraturis $=1,0000$
erit eadem pro plena luna $=0,9945$
pro noua luna $=1,0055$
& pro qualibet alia phasi $=1+0,0055.\cos v$
Hic enim a minutiis animum abstrahimus.

§. 1055. Sit porro distantia telluris a sole media $=1$, orbitae telluris eccentricitas $=\varepsilon$ $=0,017$, anomalia media $=\alpha$, erit distantia ipsi respondens proxime

$$=1+\varepsilon.\cos\alpha+\varepsilon^2.\sin\alpha^2$$

siue

$$=1+0,017\cos\alpha+0,000289\sin\alpha^2$$

Unde neglectis iterum minutiis unitas, ad quam referuntur numeri praecedentis tabellae pro qualibet phasi lunae, & pro qualibet anomalia media telluris erit

$$=1-0,034\cos v+0,0055\cos\alpha.$$

Per hanc ergo in dato quouis casu multiplicandus erit numerus ex praecedente tabella deductus, quo habeatur claritas phaseos media ad eam unitatem reuocata, quae claritatem plenae lunae centralem exhibet, eo tempore, quo eius distantia heliocentrica est $=1$, siue radius orbis magni.

§. 1056. Definitis iam modificationibus claritatis phasium lunae, extra athmosphaeram telluris spectandae, iam videamus quaenam inde prodeat illuminatio plani itidem extra athmosphaeram lunae normaliter obuersi. Utique haec ab illa est diuersissima, cum pendeat a magnitudine phaseos adparente adeoque & a distantia lunae geocentrica, a qua claritas visa tantummodo pendet in minutiis iure meritoque reiiciendis.

§. 1057

§. 1057. A plena luna ut ordiamur, dicta claritate solis $=1$, vidimus claritatem mediam cuiusuis phaseos esse (§. 1047.)

$$\eta = \frac{4(\sin v - v.\cos v) A \sin s^2}{3\pi(1-\cos v)}$$

atque hinc habuimus claritatem mediam plenilunii

$$\eta = \tfrac{2}{3} A. \sin s^2.$$

Sit ergo semidiameter solis e tellure visa $= S$, semidiameter lunae $= \sigma$, claritas plani quod absolute album ponemus, cum a sole normaliter collustratur $= C$, cum a plena luna collustratur $= c$, erit (§. 109. 715.)

$$C = (\sin S)^2$$
$$c = \tfrac{2}{3} A. \sin s^2. \sin \sigma^2$$

adeoque

$$C : c = \sin S^2 : \tfrac{2}{3} A. \sin s^2. \sin \sigma^2$$

Data ergo albedine lunae media A, facile hinc dabitur ratio inter illuminationem soli lunaeque debitam.

§. 1058. Contra ea si luna fuerit extra syzigias, illuminatio inde nascens decrescet in ratione composita ex claritate media visa & area phaseos. Prior ratio est

$$= \tfrac{2}{3} A. \sin s^2 : \frac{4(\sin v - v.\cos v) A. \sin s^2}{3\pi(1-\cos v)}$$

altera vero

$$= 2\pi : \pi(1-\cos v)$$

Quare cum in utraque hac ratione minuatur claritas plani plenilunio debita

$$c = \tfrac{2}{3} A. \sin s^2. \sin \sigma^2$$

 erit

erit ista iam

$$c = \frac{2(\sin v - v.\cos v) A.\sin s^2.\sin \sigma^2}{3\pi}$$

unde

$$C : c = \sin S^2 : \frac{2(\sin v - v.\cos v) A.\sin s^2.\sin \sigma^2}{3\pi}$$

$$c = \frac{2(\sin v - v.\cos v) A \sin s^2 \sin \sigma^2.C}{3\pi.\sin S^2}$$

§. 1059. Quodsi ergo & hic quantitatem

$$\frac{A.\sin s^2.\sin \sigma^2.C}{\sin S^2}$$

ceu unitatem spectemus, quippe quae a phase lunae fere non pendet, erit

$$c = \frac{2(\sin v - v.\cos v)}{3\pi}$$

Unde sequens concinnatur tabella cum praecedente comparanda.

Elon-

Elongatio ☽ a ☉ v	illuminatio plani a phaſe ☽ . c	Elongatio ☽ a ☉ v	illuminatio plani a phaſe ☽ , c
0°	0,0000	90°	0,2122
10	0,0004	100	0,2733
20	0,0030	110	0,3387
30	0,0099	120	0,4060
40	0,0229	130	0,4720
50	0,0435	140	0,5336
60	0,0727	150	0,5872
70	0,1107	160	0,6294
80	0,1576	170	0,6569
90	0,2122	180	0,6666

§. 1060. Numeri huius tabellae ſe habent ad numeros analogos tabellae praecedentis ut diameter lunae adparens ad latitudinem phaſeos, unde neque claritas neque illuminatio in ratione ſimplici phaſium, ſed illa longe lentius haec vero celerius decreſcit.

§. 1061. Porro unitas ad quam referuntur numeri huius tabellae

$$\frac{A.\text{ſin}\, s^2.\, \text{ſin}\, \sigma^2.C}{\text{ſin}\, S^2}$$

quadruplici modo variabilis eſt. Eſt vero ratio $C:\text{ſin}S^2$ albedo plani, quo normaliter excipitur lumen phaſeos, quae ergo ſi dicatur $= a$, unitas iſta erit

$$A.a.\text{ſin}\, s^2.\text{ſin}\, \sigma^2$$

adeoque duplici modo adhuc variabitur. Ut ergo utraque iſta variatio ad unitatem conſtantem reuocetur, ponamus, lunam una eſſe

 in

in distantia heliocentrica radio orbis magni aequali & in distantia geocentrica media, hoc casu erit

$$s = 0^{\circ}, 32', 10''$$
$$\sigma = 0, 31, 30$$

§. 1062. Quodsi iam assumamus numeros tabellae ad hunc casum referri, facile patebit, qua ratione pro ceteris casibus augendi & minuendi sunt. Manente enim semidiametro lunae adparente s, numeri isti multiplicandi erunt per quantitatem (§. 1055.)

$$1 - 0{,}034 \cos v + 0{,}0055 \cos \alpha \quad .$$

quo habeatur eorum valor, quatenus iste a distantia lunae heliocentrica pendet. Porro dicta dicta distantia lunae media $= 1$, ea quae quouis alio tempore obtinet $= \delta$, numeri isti insuper diuidendi erunt per $\delta\delta$. Et hic enim minutias negligimus, quas si in computum inducere volueris, semidiametri s, σ ex tabulis lunaribus pro dato quouis momento sunt definiendae, quo curatius unitas ista determinetur. Sic enim eam & a parallaxi lunae adeoque ab eius altitudine supra horizontem pendere videbis.

§ 1063. Data vero opera in hoc calculo sumsimus claritatem lunae mediam ex singulis claritatibus partialibus. Etenim ob inaequalem lunae superficiem singuli fere anguli incidentiae ubique obtinent, quod secus esset, si superficies lunaris perfecte esset sphaerica, qualem eam esse ob concinnitatem calculi assumsimus. Hoc vero modo singulos angulos incidentiae in ea lunae loca transtulimus, ubi reuera futura forent, si figura assumta vera esset.

eſſet. Unde hac ratione aberrationes quodammodo compenſantur. Sic v. gr. in plenilunio radii ſolares in latera montium, qui limbum lunarem cingunt, minus oblique incidunt. Contra ea obliquior eſt incidentia in decliuitates montium & cauitatum quae centro diſci lunaris ſunt propiores. Hoc vero modo claritates partium plenae lunae magis ad aequalitatem reducuntur, atque hinc eſt, ut limbus lunae, cum pleno orbe lucet, clarior videatur, ac foret, ſi eius ſuperficies eſſet perfecte ſphaerica.

§. 1064. Videamus iam, quaenam foret illuminatio plani ſi luna priori caſu eſſet abſolute alba, atque ſi eſſet ſpeculum ſphaericum perfecte reflectens. Sit ergo claritas lunae a ſole normaliter colluſtratae, claritas plani, quod itidem abſolute album ponemus, erit tempore plenilunii (§. 1057.)

$$c = \tfrac{2}{3}.\sin\sigma^2$$

At vero ſi luna eſſet ſpeculum perfecte reflectens foret (§. 671.)

$$c' = \tfrac{1}{4}.\sin\sigma^2$$

quare erit

$$c : c' = \tfrac{2}{3} : \tfrac{1}{4} = 8 : 3$$

adeoque illuminatio in caſu perfectae albedinis erit ad eam, quae debetur ſpeculo, ut 8 ad 3. Haec obtinerent, cum luna eſt in oppoſitione. At ſupra vidimus illuminationem plani ſpeculo debitam a ſitu lunae ratione ſolis fere non pendere (§. 671.) Contra ea notabiliter decreſcit illuminatio lunae debita, ſi haec ponatur opaca, quantumuis licet alba. Sic enim, quod ex tabella §. 1059. patet, in

quadraturis iam ad tertiam partem reducitur, ut adeo hoc caſu ſit

$$c : \grave{c} = \tfrac{2}{9} : \tfrac{1}{4} = 8 : 9 .$$

Etſi ergo utroque caſu eadem radiorum quantitas in lunam incidat eademque tota quanta eſt reflectatur & diſpergatur, attamen hinc patet reflexionem, quae fit a ſpeculo diuerſiſſimam eſſe a diſperſione, quae fit a corpore abſolute albo.

§ 1065. Experientia conſtat partem lunae deficientem tenui adhuc lumine tubis aſtronomicis conſpicuam eſſe, cum luna coniunctioni eſt proxima. Hoc vero lumen a tellure tunc partem a ſole colluſtratam lunae fere totam obuertente in lunam reflecti extra dubitationis aleam poſitum eſt, quippe in eadem fere ratione decreſcere videtur, qua decreſcit lumen phaſeos telluris e luna ſpectabilis. Hoc iam lumen calculo ſequentem in modum perluſtrabimus.

§. 1066. Ob immenſam ſolis diſtantiam aſſumere licebit phaſin telluris e luna ſpectandam eſſe complementum phaſeos lunae e tellure viſae. Porro facile patet illuminationem lunae a tellure, ſi ab athmoſphaera telluris abſtrahamus animum, eodem abſolui calculo, quo antea illuminationem telluris a luna peruestigauimus, ratione habita diuerſae albedinis diuerſaeque ſemidiametri adparentis. Similiter quod facile obuium eſt, phaſis telluris lumen in lunam haud ſecus proiicit, ac ſol in plenilunio. Quare primo definiemus claritatem, quae in medio diſci lunaris inde oritur.

§. 1067.

§. 1067. Sit ergo albedo telluris $= a$, eius ſemidiameter adparens e luna ſpectata $= \Sigma$, diſtantia lunae a coniunctione $= v$, eiuſdem diſtantia ab oppoſitione $= \pi - v$, claritas in centro lunae telluri debita $= \varkappa$, atque in formula ſupra eruta (§. 1058.)

$$c = \frac{2(\sin v - v\cos v)A.\sin s^2.\sin\sigma^2}{3\pi}$$

ſequentes faciendae ſunt ſubſtitutiones.

1°. Albedini lunae A ſubſtituenda albedo telluris a.

2°. Semidiametro lunae σ ſubſtituenda ſemidiameter telluris Σ.

3°. Cum phaſis telluris ſit complementum phaſeos lunaris
pro v ſubſtituendum $\pi - v$
pro ſin.v - - - - $\sin \pi - v = \sin v$
pro $+\cos v$ - - - $-\cos v$

4°. Semidiametrum ſolis s, cum minutias in hiſce negligamus retinebimus eandem.

5°. Cumque c ſit claritas plani abſolute albi, (§. 1057.) ut iſta abeat in claritatem lunae, formula multiplicanda eſt per albedinem lunae A. Unde erit

$$\varkappa = \frac{2}{3\pi}(\sin v + (\pi - v)\cos v)a.A.\sin s^2.\sin\Sigma^2$$

Quae adeo erit claritas centri lunae telluris phaſi debita, quaeque utique maxima eſt, cum incidentia luminis ſit normalis. Unitas vero in hoc computo ut in ſuperiori (§. 1041. ſeqq.) eſt claritas ſolis.

§. 1068.

§. 1068. Hinc iam facile habebitur claritas media phaſeos lunae deficientis. Eſto AMBFA pars lunae obſcura, erit

$$FM = y = \pi - v$$
$$FE = a = \tfrac{1}{2}\pi$$

At vero ſector AMBF a tellure eodem modo colluſtratur ac a ſole tempore plenilunii, quare ſi in formulis (§. 1044.) pro hoc ſectore erutis

$$z = \tfrac{2}{3}\pi(1 + \operatorname{cof} MG)$$
$$q = \tfrac{2}{3}(FM + \operatorname{fin} MG \cdot \operatorname{cof} MG) A.\operatorname{fin} s^2$$

illuminationi normali lunae, quae ſoli debetur, ſubſtituatur ea quae debetur phaſi telluris, quaeque eſt $= \varkappa$ (§. 1067.) erit ut ſupra (§. 1046.) claritas media ſectoris AMBF ſiue partis lunae obſcurae $= q:z$, qua dicta $= K$, habebitur

$$K = \frac{4\varkappa((\pi - v) + \operatorname{fin} v.\operatorname{cof} v)}{3\pi(1 + \operatorname{cof} v)}$$

ſiue facili reductione facta

$$K = \varkappa\left(\frac{4(\pi - v).\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}v}{3\pi.\operatorname{fin} v} + \frac{4.\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}v.\operatorname{cof} v}{3\pi}\right)$$

§. 1069. Quatenus ergo claritas phaſeos lunae η (§. 1058.) claritas partis deficientis centralis $\varkappa$ eiuſdemque partis claritas media ab ipſis phaſium variationibus pendent, eas ſequenti tabella a nouilunio ad quadraturam uſque ob oculos ponemus.

v	$K:\varkappa$	$\frac{\varkappa}{aA\text{ſ}s^2\text{ſ}\Sigma^2}$	$\frac{K}{aA\text{ſ}s^2\text{ſ}\Sigma^2}$	$\frac{c}{A\text{ſ}s^2}$
0	0,6666	0,6666	0,4444	0,0000
10	0,6710	0,6569	0,4408	0,0494
20	0,6877	0,6294	0,4328	0,0986
30	0,6949	0,5872	0,4080	0,1475
40	0,7055	0,5336	0,3765	0,1959
50	0,7134	0,4720	0,3367	0,2437
60	0,7151	0,4060	0,2903	0,2907
70	0,7088	0,3387	0,2401	0,3366
80	0,6930	0,2733	0,1894	0,3814
90	0,6666	0,2122	0,1415	0,4244

§. 1070. Prima columna huius tabellae continet gradus elongationis lunae a ſole, ſecunda ex formula §. 1068. deducta exhibet rationem inter claritatem partis lunae deficientis centralem $\varkappa$ & mediam K. Tertia ex formula §. 1067. deducta, vel quod eodem redit ex tabella §. 1059. deſumta decrementum eiuſdem claritatis centralis ſiſtit. Quarta ex multiplicatione numerorum columnae ſecundae & tertiae naſcens, idem decrementum pro claritate media K exhibet. Quintam, quae incrementum phaſeos lunae a ſole colluſtratae oſtendit, ex tabella §. 1050. praeſenti adiunximus. Numeri trium poſteriorum columnarum ad eandem unitatem reuocantur, ſi utraque columna tertia & quarta multiplicetur per factum ex albedine lunae A, telluris a, & quadratis ſemidiametrorum ſolis s & telluris Σ; quinta vero per factum ex albedine lunae &

qua-

quadrato ſemidiametri ſolis, hoc facto unitas iſta erit claritas ſolis extra athmoſphaeram viſa. Unde cum columna tertia & quarta eadem ratione mutetur, numeri, quos utraque continet, abſque iſta multiplicatione inter ſe conferri poſſunt. Eos vero eadem ratione proxime decreſcere vel ex columna ſecunda euidens eſt.

§. 1071. Difficilius inter ſe conferuntur columna quarta & quinta, cum illa ſola ab albedine telluris media pendeat. Experimentis rem abſoluere vix dabitur. Etſi enim uterque oculus armetur teloſcopio, atque inter utriuſque lentis obiectiuae aperturam ea quaeratur ratio, qua lumen phaſeos atque partis deficientis ad aequalitatem reducatur, attamen adeo parua erit alterius lentis apertura, ut eius diameter vix exacte menſurari poſſit. Accedit dubium an eadem claritas utrique oculo eadem videatur, quod certe haud contemnendum eſt. Denique cum lumen iſtud adeo ſit tenue alia adhuc ſuperuenit difficultas. Supra enim iam vidimus eo incertius eſſe oculi iudicium, quo minor eſt claritas comparanda (§. 270.)

§. 1072. Albedo telluris non tam ab ipſa telluris ſuperficie quam vero ab athmoſphaera pendet. At aquae ſuperficies exiguam luminis partem reflectit, atque color aquae marinae valde tenuis eſt. Partes continentis, ſi loca excipias niue tecta exiguam luminis partem reflectunt (§. 753. 758.) Contra ea vidimus claritatem athmoſphaerae notabiliorem eſſe (§. 908. 909. 985. 986.) eamque ad clari-

tatem

tatem cerussae a sole in altitudine 60 gr. haerente normaliter collustratae se habere ut 2 ad 5. (§. 915.) Quare cum albedo cerussae sit $= 0{,}4$ (§. 755.) atque radii solares ex altitudine 60° per aerem delabentes debilitentur ut 5 ad 3, claritas plani absolute albi erit ad claritatem athmosphaerae mediam ut $(\frac{5}{3}\cdot\frac{5}{2}) : \frac{2}{5} = 125 : 12 = 10\frac{1}{2} : 1$. Ea ergo est claritas athmosphaerae, quae foret claritas plani a radiis solaribus extra aerem normaliter collustrati, cuius albedo est $= \frac{2}{21}$. Unde si nullum aliud lumen a tellure in lunam reflecteretur, albedo telluris foret $= \frac{1}{10}$. Quodsi ergo hanc a corporibus terrestribus tertia vel quarta parte augeri ponamus, albedo ista erit $\frac{1}{7}$ vel $\frac{1}{8}$. Atque vix maior erit albedo lunae, etsi maiorem eam esse experimenta BOVGVERIANA docere videantur. (§. 1048.) Ceterum ob maximam athmosphaere mutabilitatem (§. 910.) admodum variabilis est ista telluris albedo.

§. 1073. Quodsi tamen exempli ergo ponamus $a = \frac{1}{7}$, $s = 16'$, $\Sigma = 1°$. erit

$$a.\sin\Sigma^2 = 0{,}0000435123 5.$$

Per hanc quantitatem multiplicentur numeri columnae tertiae & quartae tabellae praecedentis, atque inde formabitur sequens.

v	$\frac{x}{A.\sin s^2}$	$\frac{K}{A.\sin s^2}$	$\frac{C}{A.\sin s^2}$
0	0,00002901	0,00001934	0,0000
10	0,00002858	0,00001918	0,0494
20	0,00002739	0,00001903	0,0986
30	0,00002555	0,00001887	0,1475
40	0,00002322	0,00001538	0,1959
50	0,00002054	0,00001465	0,2437
60	0,00001767	0,00001164	0,2907
70	0,00001474	0,00001045	0,3366
80	0,00001189	0,00000824	0,3814
90	0,00000923	0,00000615	0,4244

§. 1074. Numeri huius tabellae ad eandem unitatem ſunt reducti, quae eſt claritas plenilunii centralis (§. 1051.) Eſt enim columna quarta claritas phaſeos lunae media, columna tertia claritatem mediam partis deficientis, ſecunda claritatem eiuſdem partis centralem, prima vero elongationem lunae a coniunctione exhibet.

EXPERIMENTVM XXXIV.

Fig. 96. §. 1075. Noctu menſae FE feneſtrae admotae, quae aperta erat, & per quam lumen lunae plenae incideret ex altitudine 63 gr. horizontaliter impoſui planum album AD, atque in medio B erexi planum nigrum BG, quod umbram lunae proiiceret in BD, umbram candelae in C collocandae in partem anticam BA, adeoque haec a luna ſola, illa vero a ſola candela illuminaretur. Quo facto

eum

eum quaeſiui candelae ſitum CE, quo utraque pars AB, BD aeque videretur clara, inuenique fuiſſe DE trium pedum pariſinorum, CE ſiue altitudinem centri flammae 8 digitorum. Candela erat ſebacea, dedique operam, ut ad ſenſum aequalis eſſet eius claritas, flamma erecta atque conica, filumque probe emunctum. Altitudo ſiue axis flammae erat 18 lin. atque diameter coni maxima 3 lin. Hi numeri ex pluribus ſunt fere medii. Semidiameter lunae $= 0^\circ, 33\frac{1}{4}'$.

§. 1076. Erat itaque

$$CE:DE = 2:9 = 0,22222$$
$$\text{ang. } CDE = 12^\circ, 32'$$
$$LAF = 63, 0$$

Superficies flammae hic inſtar trianguli iſoceles erit, cuius area $= 27$ lin. quadr. quae ſi in circulum mutetur, erit eius ſemidiameter $2,3'''$ adeoque ſemidiameter adparens in D viſa erit angulus, cuius tangens

$$= (2,3) : DC = \frac{23}{4425} = 0,0051977$$

unde ſemidiameter ipſa $= 0^\circ, 17', 53''$

§. 1077. Sit iam claritas lunae plenae $= L$, candelae $= C$, erit illuminatio plani AB

$$= L.(\sin 16\tfrac{5}{8}')^2.(\sin 63^\circ.)$$

illuminatio plani BD

$$= C.\sin(17', 53'')^2.(\sin 12^\circ, 32')$$

At vero utraque haec claritas eſt aequalis, quare erit

$$\frac{L}{C} = \frac{(\sin 17' 53'')^2.(\sin 12^\circ, 32')}{(\sin 16' 37'')^2.(\sin 63^\circ)}$$

$$L : C = 1 : 3,545$$

At lumen lunae per athmoſphaeram debilitatur fere in ratione 5 : 3, quare ratio inter claritatem lunae plenae & candelae erit

$$\tfrac{3}{5}L : C = 1 : 3,545$$

ſiue

$$L : C = 1 : 2,127$$

Quare lumen candelae ſebaceae duplo clarius eſt lumine lunae plenae. Utraque haec claritas eſt claritas viſa, at vero hoc intercedit diſcrimen. Claritas lunae ſimpliciter pendet ab eius ſuperficie, quippe ab iſta lumen ſolare reflectitur. Contra ea flamma candelae eſt mediocriter diaphana, quare non modo ab eius ſuperficie verum & ex partibus interioribus lumen emittitur, atque hanc ob cauſſam lumen ſuperficiei notabiliter augetur.

§. 1078. Quodſi numero rotundiore aſſumamus lumen ſolis eſſe 500000 vicies intenſius lumine lunae plenae, quod haud ita multum a vero aberrabit (§. 10072. 1048.) intenſitas luminis ſolaris intenſitatem luminis candelae ſebaceae 250000 vicies excedet.

CAPVT II.

Computatur lumen, quo ſpectandos ſe ſiſtunt Planetae primarii.

§. 1079. Quae in ſuperiori capite de lumine planetarum eiuſque modificationibus generalius adnotauimus, ea iam ſingulis haud difficulter adplicabuntur, ſimulac ſingulorum albedo aut ſtatuatur eadem, aut ceu data aſſumatur. Ita vero rem peragemus, ut prius aſſumendo, numeros exhibeamus tales, qui

qui in veram claritatem abibunt, si ii, qui ad eundem planetam spectant, per eius albedinem multiplicentur, si unquam haec ad liquidum perducatur.

§. 1080. Superfluam esse inuestigationem illuminationis telluris singulis planetis debitam, vel inde patet, quod illuminatio cunctis iunctim debita sit paruitatis contemnendae. Unde paruitatem istam vel unico exemplo ob oculos posuisse sufficiet. Contra ea in peruestiganda eorum claritate visa eo uberiores erimus, quippe si unum Saturnum excipias, ceteri omnes lumine micant lumine stellarum fixarum haud inferiori.

§. 1081. Utique alia est claritas planetarum visa, si nudo oculo eos intuearis ac est si oculus armetur tubo astronomico. Priori casu claritas planetae non modo pendet ab apertura pupillae, verum & eo minor erit, quo magis oculus fuerit myops (§. 1038.) Contra ea posteriori casu, cum singulae partes planetae distinctius videantur, atque arceatur lumen quod a particulis aeris inflexione aliasque ob caussas dispergitur, atque insuper tubus ipse cuique oculo adcommodetur, anomalia ista ab oculo pendens fere euanescit, ut adeo si singuli planetae eodem tubo spectentur, claritas eorum haud secus calculo definietur, ac in capite praecedenti claritatem lunae visam definiuimus.

§. 1082. Ab hoc ergo computo ut ordiamur, idem quod supra (§. 1051.) notabimus claritatem planetae visam hoc casu ab eorum distantiá esse independentem. Contra ea vel

maxime pendet a diſtantia heliocentrica atque a ſitu telluris, quatenus planetae potiſſimum inferiores phaſibus ſeſe ſpectandos ſiſtunt lunaribus analogis.

§. 1083. Denſitas luminis ſolaris, quod normaliter in ſuperficies planetarum incidit, eſt reciproce ut quadratum diſtantiae (§. 115. 117.) huicque proportionalis eſt eorum claritas centralis, cum in oppoſitione verſantur.

§. 1084. Porro eodem hoc caſu, quo nempe planetae pleno orbe lucent, claritas totius diſci media eſt $\frac{2}{3}$ claritatis centralis (§. 1048.) atque claritas media ceterarum phaſium viſa in eadem ratione decreſcit qua numeri tabellae §. 1050. Definita itaque claritate centrali planetae in oppoſitione conſtituti, facili computo dabitur claritas media cuiuſuis phaſeos, cum illa ſimpliciter per numerum iſtius tabellae huic phaſi reſpondentem multiplicanda ſit.

§. 1085. Sit ergo claritas telluris centralis hoc ſenſu ſumta $= 1$, ſiue eius claritas media $= \frac{2}{3}$, ſumtis planetarum diſtantiis maximis, mediis atque minimis ex *Tabulis Labireanis*, haud difficulter concinnabitur tabella ſequens

Plane-

Planetae	Claritas in oppoſitione verſantis centralis viſa		
	maxima	media	minima
♄	0,0120	0,0110	0,0099
♃	0,0408	0,0370	0,0334
♂	0,5234	0,4307	0,3608
♁	1,0134	1,0000	0,9672
♀	1,9396	1,9113	1,8856
☿	10,5760	6,6735	4,5560

§. 1086. Quodſi ergo numeri huius tabellae per numeros tabellae §. 1050. multiplicentur, habebitur claritas phaſeos planetae media, ſi phaſin ſpectes, maxima, media & minima ſi ſpectes diſtantias heliocentricas.

§. 1087. Planetae inferiores haud ſecus ac luna omnes phaſes terricolis ſpectandas exhibent. Sit S ſol, T tellus, PCQ planeta inferior. Nectantur centra S, T, C rectis ST, TC, CS, atque agantur normales QP, KL, erit QNP ſuperficies planetae illuminata, quam hemiſphaerium eſſe ponemus, etſi aliquanto maior ſit. KML erit hemiſphaerium telluri obuerſum, unde phaſis e tellure ſpectanda erit KNP, & M centrum diſci adparentis, PL pars deficiens. At vero ob arcus QN=NP=KM =ML=90°, erit PL=MN, PCL=SCT & KCP=CST+STC. Sed arcus KNP eſt ille ipſe quem ſupra (§. 1047.) vocauimus $=v$, unde erit Fig. 96.

$$v=CST+STC=180°-SCT$$

ſiue ſumma elongationis planetae a ſole geocentricae & planetae a tellure heliocentricae.

 Porro

Porro dicta ſemidiametro ſolis e planeta viſa adparente $=s$, albedine planetae media $=A$, claritate phaſeos media $=\eta$, erit (§. cit.)

$$\eta = \frac{4(\sin v - v.\cos v)\, A.\sin s^2}{4\pi(1-\cos v)}$$

§. 1088. Contra ea planetae ſuperiores haud omnes phaſes nobis ſiſtunt ſpectandas. Sit enim tellus C, planeta ſuperior T, eodem modo demonſtrabitur, angulum STC eſſe partem phaſeos deficientem. At vero hic angulus, cum vel maximus eſt, pro Marte gradus 50, pro Ioſie gr. 12, pro Saturno gradus $6\frac{1}{2}$ nunquam excedit. Quare unum Martem notabiliter gibbum videre terricolis datum eſt, Iupiter & Saturnus fere pleno orbe conſtanter lucere videntur.

§. 1089. Hinc nec notabiliter decreſcit claritas phaſeos cum vel maxime deficit. Etenim manente diſtantia planetae a ſole, ratio inter claritatem phaſeos plenae & maxime deficientis erit pro

♄ = 1 : 0,998.

♃ = 1 : 0,990.

Contra ea pro

♂ = 1 : 0,862.

§. 1090. Pendet vero phaſis iſta maxime deficiens ab angulo STC, qui quidem facile reperiretur, ſi uterque planeta incederet in circulo concentrico. Foret enim TC tangens circuli C, adeoque SC : ST ſinus anguli STC, cum maximus eſt. At haec ſecus ſe habent, cum planetae moueantur in ellipſibus poſitione & magnitudine haud uno reſpectu diuerſis.

Unde

Unde intricatissima euadit solutio problematis, *quo inuenienda est planetae inferioris e superiori spectati elongatio a sole omnium maxima siue angulus S TC maximus.* Solutionem hanc ab aliis peractam vel tentatam nondum vidi, quare etsi ipse eam ad finem non perduxerim, dicam, quae sese mihi in ea rimanda obtulerunt.

§. 1091. Sit S sol, CTB orbita planetae superioris, DVA orbita planetae inferioris. Ille Fig. 97. sit in T, hic vero in V, cum angulus STV est maximus. Ducta recta TV per centra utriusque planetae, facile patet hanc debere esse tangentem curuae DVA, puncto V respondentem.

§. 1092. Moueatur planeta T per spatiolum orbitae infinite paruum Tt, ducantur radii vectores ST, St, SV, atque tangens tV. Cum iam angulus STV debeat esse maximus, eius differentiale erit $=0$, quare uterque angulus STV, StV, erit aequalis. Quodsi ergo recta SV ducta concipiatur per punctum intersectionis utriusque tangentis TV, tV, *quatuor ista puncta S, t, T, V erunt in peripheria circuli.* Etenim anguli aequales StV, STV eidem rectae SV insistunt. Porro cum puncta T, t itidem sint in orbita planetae, sibique infinite vicina, *circulus iste orbitam planetae in T tanget, adeoque tangens NM & orbitae & circulo isti erit communis, similiterque centrum circuli erit in normali TK.*

§. 1093. Sit iste circulus SKVT, diameter TK, ducantur rectae SK, VK, anguli TSK, TVK erunt recti, adeoque *si ad radium vectorem ST & tangentem TV agantur normales SK, VK,*

punctum concursus K erit in normali TK, unde diameter circuli TK definitur intersectione utriusque normalis TK, VK.

§. 1094. Porro cum NM & orbitam & circulum in T tangat, erit

$$STN = SVT$$
$$VTM = TVS$$

Quare radii vectores ST, SV orbitae suae sub eodem angulo insistunt, estque STN elongatio planetae T a sole e planeta V visa, & VTM elongatio utriusque planetae e sole visa.

§. 1095. Hactenus dicta obtinent, quaecunque sint planetarum orbitae, & quicunque fuerit earum situs. Quodsi vero iam ponamus eas esse ellipses, atque solem esse in foco communi, specialiora superuenient anguli STV maximi symptomata.

§. 1096. Sit axis orbitae maioris CB, focus alter F, axis orbitae minoris AD, focus alter E. Ducantur rectae FT, VEL, atque per naturam ellipseos erit

$$STK = KTF$$
$$SVK = KVL$$

At cum quatuor puncta S, K, V, T sint in peripheria circuli, erit STK = SVK adeoque &

$$KTF = KVL$$

unde punctum intersectionis L erit in eodem circulo, & ob STK = KTL, & TK diametrum, triangulum STL erit isocele, unde

$$TS = TL$$
$$\text{ang.}\ TSL = SLT = SVT = STN = LTM$$

hinc

$$LVT = SVT - TSV = LSV.$$

§. 1097.

§. 1097. *Assumto ergo loco vel puncto T, ducantur rectae TS, TF in utrumque focum S, F, fiat TL = TS, atque ex L agatur recta LEV per focum alterum orbitae minoris E, eritque V locus planetae inferioris, atque verus erit, si ducta TV orbitam in V tangat.*

§. 1098. Sit iam

	orbitae CTB		DVA
axis maior	$CB = a$	-	$DA = \alpha$
axis minor	$= c$	-	$= \gamma$
distantia focorum	$SF = b$	-	$SE = \beta$
radius vector	$ST = x$	-	$SV = \xi$
angulus	$STF = SVE = v$		
angulus	$SVT = STN = \varphi$		
angulus maximus	$STV = \omega$		

erit per naturam ellipseos

$$4\sin\varphi^2 = 4\cos\tfrac{1}{2}v^2 = 2(1+\cos v) = \frac{cc}{ax-xx} = \frac{\gamma\gamma}{\alpha\xi-\xi\xi}$$

$$\sin\varphi = \frac{c}{2\surd(ax-xx)} = \frac{\gamma}{2\surd(\alpha\xi-\xi\xi)}$$

$$\sin\omega = \xi.\sin\varphi : x = \frac{c\xi}{2x\surd(2x-xx)}$$

$$\xi = \tfrac{1}{2}\alpha + \tfrac{1}{2}\surd(\alpha\alpha - \gamma\gamma.\text{cosec}\,\varphi^2)$$

$$x = \tfrac{1}{2}a + \tfrac{1}{2}\surd(aa - cc.\text{cosec}\,\varphi^2)$$

$$x : \sin\varphi = \xi : \sin\omega = TK$$

$$c^2 : (ax-xx) = \gamma^2 : (\alpha\xi - \xi\xi)$$

$$\sin\omega = \frac{(\alpha\sin\varphi + \surd(\alpha^2\sin\varphi^2 - \gamma\gamma)).\sin\varphi}{a.\sin\varphi + \surd(a^2\sin\varphi^2 - cc)}$$

§. 1099. Ex ultima hac aequatione dabitur angulus ω absolute maximus, atque inde definietur, qualis esse debeat utriusque orbitae situs siue angulus FSE, quo vere obtineat. At

 facile

facile praeuidetur calculum haud parum futurum fore complexum.

§. 1100. Assumto angulo SVT $= \varphi$, dabuntur latera ST, SV, & anguli TSF, VSA, cumque porro detur declinatio axium siue angulus FSA, atque sit

$$FSA + ASV = FST - TSV$$

hinc peruenietur ad aequationem, qua per axes ellipsium & angulum FSA definietur angulus SVT. At nisi breuius inueniri possit, hac certe ratione vix a quoquam inuenietur.

§. 1001. Cum anguli STN, SVT sint aequales, patet si alteruter fuerit rectus, & alterum rectum esse debere. Unde si punctum V fuerit in aphelio, T debet esse in perihelio. Quod idem locum habebit si planetarum alteruter moueatur in circulo, cuius centrum cum centro solis coincidit.

§. 1102. Claritatem planetarum nudo oculo visam aliter definiendam esse iam supra (§. 1038. 1081.) breuibus indicauimus, cum haud distincta sit eorum imago in retina oculi depicta, atque hoc ipso longe sit auctior. Acutissime diuersitatem istam perscrutauit cel. IVRINVS in *Essay upon distinct and indistinct vision* Systemati Optices cel. SMITHII adnexo, cuius epitome & in suum Systema opticum transtulit cel. KAESTNER. Unde ea tantum hic mutuabimus, quae ad rem nostram faciunt, cetera quoque superadedituri, quae cel. Auctoris acumini sese subduxisse videntur.

Fig. 98. §. 1103. Circulus AB referat imaginem planetae vel obiecti quae in retina depingeretur, si visio esset distincta. At cum confusa sit

ſit viſio in ſpatio AB non erunt apices conorum luminoſorum, verummodo eorum axes. Ponamus ergo radios, qui in punctum C coincidere deberent, in retina ita eſſe diſperſos, ut repleant ſpatium circuli FG. Hoc ergo ſpatium debebitur puncto C, quod eſt ipſius centrum, atque facile patet pro quouis alio puncto ſpatii AB ſimile ſpatium concipiendum eſſe, quod ſpatio circulari FG eſt aequale, ſed eccentricum.

§. 1104. Sit punctum B in peripheria imaginis diſtinctae radii, qui in B coincidere deberent diſpergentur in ſpatio circuli ILDM. Per puncta I & D ducantur circuli DE, IH imagini diſtinctae AB concentrici, atque erit circulus exterior HI ſpatium in quod ſeſe diffundunt radii omnes qui in AB coincidere deberent. Circulus interior DE a radiis diſperſis aeque illuminabitur, cum in quoduis eius punctum Q radii ex ſingulis punctis imaginis diſtinctae AB incidant. Contra ea ſpatium annulare HLEK, cuius diameter interior DE, exterior HI, inaequaliter illuminatur, cum plures radii incidant in partes centro viciniores. Quodſi enim v. gr. puncto P circumſcribatur circulus MRSKN, cuius radius = CG, quantitas radiorum in P incidentium erit ut ſpatium lentiforme RSA, adeoque eo maior, quo punctum P fuerit centro C vicinius.

§. 1105. Sit ſemidiameter *imaginis diſtinctae* CB = s, *ſemidiameter diſperſionis* CG = σ, erit ſemidiameter *imaginis confuſae aeque illuminatae* CE = $\sigma - s$, *latitudo penumbrae* EI = $2s$. Porro

voce-

vocetur claritas imaginis diſtinctae $= \eta$, claritas confuſae aeque illuminatae $= \varkappa$.

§. 1006. Spatium circulare DE aeque illuminatur ac ſi omnes circuli diſperſionis MRN, LIK, FLG eſſent concentrici, quare cum claritas ſit reciproce ut ſpatia, erit

$$\eta : \varkappa = \sigma^2 : s^2$$

$$\varkappa = \frac{\eta . s^2}{\sigma^2}$$

§. 1107. Semidiameter σ eadem ratione mutatur, qua mutatur apertura pupillae. Quodſi ergo haec ponatur conſtans, ut noctu eſſe ſolet, cum caelum intuemur, *claritas imaginis confuſae erit in ratione compoſita ex claritate imaginis diſtinctae eiuſque area, adeoque ſimpliciter in ratione quantitatis radiorum in oculum irruentium.*

§. 1108. Poſitio haec inuariata manet, etſi pupilla ſtatuatur variabilis, cum eadem ratione augeatur claritas imaginis diſtinctae η & area circuli diſperſionis. Quare *claritas imaginis confuſae conſtanter erit in ratione areae imaginis diſtinctae adeoque ſimpliciter in ratione illuminationis plani planetae vel obiecto normaliter obuerſi.*

§. 1109. Probe tamen notandum eſt, haec obtinere, ubi ſemidiameter diſperſionis CG ſemidiametrum CB pluries excedit. Quodſi enim ipſi eſſet aequalis, ſpatium DE plane euaneſceret, adeoque tota imago foret veluti penumbra, a centro C ad extremitatem uſque decreſcens.

§. 1110. Similiter ſi ponamus imaginem diſtinctam eſſe FLGK, atque circulum diſperſionis notabiliter minorem tantummodo eſſe

ARB,

ARB, hoc caſu, qui priori oppoſitus eſt, foret itidem circulus DE ſpatium imaginis aequaliter illuminatae, at eius area ab apertura pupillae perparum penderet. Cum vero ſemidiametri planetarum admodum ſint parui, poſitiones iſtae (§. 1006. ſeqq.) abſque notabili errore admitti poterunt.

§. 1111. Ponit vero cel. IVRINVS ſemidiametros CB eaſdem quae diſtincte videntur, atque proinde rectas CB, CG, CE, EG effert in minutis & ſecundis graduum circuli, quod utique facere licet, cum rectae iſtae angulis reſpondentibus ſint proportionales. Porro medium quoddam ſumendo ſtatuit ſemidiametrum diſperſionis $CG = 2' = 120''$, adeoque $FG = 2\sigma = 240''$. Hinc aſſumendo diametros planetarum adparentes, diſtincte viſas, facili computo quaerit diametros imaginis confuſae DE, HI, atque facit pro

♃	$AB = 38''$	$DE = 202''$	$HI = 278''$
♂	- - = 6	- - = 234	- - = 246
♀	- - = 18	- - = 222	- - = 258

§. 1112. Similiter pro ſtellis fixis ponit $AB = 0$, cum earum ſemidiameter fere ſit infinite parua, neque tubis aſtronomicis adhucdum obſeruari poſſit. Hinc vero infert eſſe $EG = GI = AB = 0$, adeoque $DE = 240''$. Unde *earum diametrum nudo oculo viſam aequalem ponit diametro diſperſionis.* Quae quidem poſitio utique a vero vel nihil aberrat. At ea aſſumta, alia inde neceſſario fluit, *diametrum diſperſionis eſſe variabilem, idque independenter ab apertura pupillae.* Hanc ergo poſitionem una cum conſectariis iam fuſius exponemus.

§. 1113.

§. 1113. Stellas fixas diuerſae eſſe magnitudinis adparentis, etſi nudo oculo ſpectentur, ita conſtat, ut hanc ipſam ob cauſſam iam ab antiquiſſimis aſtronomis in ſex aut ſeptem claſſes diſtributae ſint. Porro easdem inſtar puncti videri, ſi oculus armetur tubo aſtronomico, recentioribus obſeruationibus haud minus conſtat. Similiter magnitudinem adparentem earum magnitudini planetarum parum eſſe inferiorem, ſi nudo oculo videantur, palam fit, ſi reputes, criteriis opus eſſe, quibus planetae a fixis dignoſcantur.

§. 1114. Magnitudinem Martis adparentem, & oculo iudice admodum eſſe variabilem, ita in vulgus notum eſt, ut, cum in perihelio verſatur ſimulque oppoſitioni eſt proximus, adeo videatur volumine auctus, qui a pluribus cometis vel ſtellis nouis accenſeatur, ipſoſque rei aſtronomicae peritos in admirationem rapiat.

§. 1115. At vero haec omnia ſecus ſe haberent, ſi unica adeſſet viſionis confuſae cauſſa, cui calculum ſuum ſuperſtruxit acutiſſimus IVRINVS. Sit enim AFP oculus, PF eius
Fig. 99. axis, AD diameter pupillae. In hanc incidant radii e puncto infinite remoto CA, ED, iſti in F cum axe coinciderent, ſi viſio eſſet diſtincta. At cum oculus nimis ſit myops, coincident in E, ibique adeo erit apex coni luminoſi, atque ex hoc puncto radii iterum divergunt, inciduntque in ſpatium retinae circulare, cuius diameter eſt φf, eritque

$$\varphi f = \frac{FE.AD}{PE}$$

Hoc

Hoc ergo respectu crescit diameter dispersionis φf directe ut diameter aperturae pupillae AD, & axis coni diuergentiae EF, reciproce ut axis coni conuergentis PE.

§. 1116. Dum stellas easque solas intuemur, pupilla maxime est aperta, atque utique parum mutabitur siue maiores siue minores stellas intueamur. Simili modo idem quoque est situs apicis E. Etsi enim retinae F propius admoueatur, cum obiectum quoddam enixius intuemur, attamen disparitas haec omnino cessat, cum intuemur stellas diuersae magnitudinis, at sibi proximas, quales sunt *Alcor* & *media caudae* in *Ursa maiori*, quas ipse IVRINVS aliam ob caussam exempli ergo adfert. *Alcor* inter stellas quintae magnitudinis, *media caudae* inter eas quae sunt secundae refertur. At vero spatium imaginis confusae fφ pro utraque deberet esse aequale, cum oculus, si aperturam pupillae spectes & situm apicis E, eodem plane modo adficiatur, adeoque radii utriusque huius sideris in idem spatium φFf incidant, atque in toto isto spatio si extremitatem limbi excipias, aeque disseminentur.

§. 1117. Distinguendum itaque esse videtur spatium imaginis φf quatenus a radiis collustratur, ab eo spatio, quatenus sensibilitas sese exserit. Illam *imaginem depictam* vel *illuminatam*, hanc vero *imaginem sensibilem* vocabimus. Utriusque differentiam sequentem in modum stabiliemus.

§. 1118. Ponamus utramque pro *Alcore* coincidere, eamque esse φf, utraque quoque coincidere deberet pro *media caudae*, atque fo-

res

ret $=\varphi f$, si diuergentia radiorum unica esset caussa visionis confusae. At vero cum *Media* ista vel quintuplo maior videatur, maior quoque erit eius imago sensibilis, ac est imago depicta. Quodsi ergo eius diametrum ponamus $=g\gamma$, sensibilitas sese utrinque extendet ex φ in g & ex f in γ. Unde eadem differentia & pro *Alcore* obtinebit.

§. 1119. Triplicem vero accedere caussam inueni, quae vel utramque imaginem vel sensibilem solam augere valent. Prima est impelluciditas aeris. Eo enim maiores videntur stellae, quo magis aer est nebulosus, quoque densioribus onustus est vaporibus. Haec caussa utramque imaginem auget.

§. 1120. Secunda est cumulatio motus tremuli neruorum vel fibrillarum in fundo oculi iam supra descripta (§. 833. 834.) Haud enim ita infixis oculis obiectum intuemur, quin extremitas axis radiorum F continuo aliis retinae punctis insistat. Quo ipso imago depicta $f\varphi$ mobilis est, situmque mutat. Ponamus eam vagari per spatium $g\gamma$, totum hoc spatium imaginem sensibilem constituet. Admodum enim celeris est ista translatio axeos PF, unde per eandem rationem, quam supra (§. cit.) experientia firmam esse vidimus, sensibilitas & in iis partibus spatii $g\gamma$ aderit, a quibus radii luminis $f\varphi$ recesserunt. Facile vero patet hanc ob caussam spatium imaginis sensibilis eo magis auctum iri, quo densius est lumen in imagine depicta disseminatum. Pendet enim diameter γg a tempore, quo imago depicta ad extremitatem limbi g, γ reuertitur. Hoc vero

vero tempus pendet a vi luminis, quo retina feritur (§. 833.)

§. 1121. Tertia caussa est eadem cumulatio motus tremuli, atque haec locum haberet, etsi oculos obiecto ita infigere possemus, ut immota esset imago depicta. Etenim cumulatione ista fit, ut & illae fibrillae quae imagini depictae contiguae sunt, ad motum cieantur. Eo plures vero in motum concitari, quo densius est lumen in imaginem depictam incidens, atque motum istum extremitatem versus debiliorem esse, vel me tacente intelligitur.

§. 1122. Utraque haec caussa pendet ab apertura pupillae. Quo enim haec minor fuerit, eo debilius est lumen in retina disseminatum, unde eo quoque minor est & cumulatio & communicatio motus tremuli.

§. 1123. Notandum tamen, & hic tres istos casus esse distinguendos, quos supra exposuimus (§. 1109. 110.) Quodsi enim diameter adparens obiecti, veluti planetarum admodum fuerit exigua, claritas imaginis depictae ab apertura pupillae fere non pendet, etsi notabiliter minuatur eius area. Unde area imaginis sensibilis minuetur, non ob imminutam densitatem luminis, quippe quae eadem manet, sed ob imminutam aream imaginis depictae. Contra ea si admodum notabilis fuerit semidiameter obiecti, veluti cum lunam plenam intuemur, opposita erit horum ratio. Parum enim hoc casu ab apertura pupillae pendet area imaginis depictae, at maxime variatur luminis densitas. Unde imminuta pu-

 pilla

pillae apertura decrescet penumbra imaginis depictae eiusque claritas, & duplicem hanc ob caussam minuetur area imaginis sensibilis.

§. 1124. Porro utraque haec caussa (§. 1120. 1121.) adest, siue confusa sit visio siue distincta, immo posteriori casu quandoque notabilius sese exserit. Cum enim eadem radiorum quantitas in imaginem incidat, densiores erunt, ubi imago fuerit distincta, quia minor est eius area. Quare maior aderit cumulatio & communicatio motus tremuli fibrillarum. Circulus albus, cui circumscriptus est annulus niger, maior videtur circulo nigro, quem cingit annulus albus, etsi utriusque diameter sit aequalis. Maior insuper erit differentia, quo clariori lumini exponantur. Similiter & in vulgus notum est, suris crassioribus videri eundem hominem, cum tibialia alba induit, quam vero cum nigris utitur.

§. 1125. Cum stellae fixae, quae minores sunt fixis sextae vel septimae magnitudinis teloscopicae sint, siue nudis oculis sese subducant, imago earum insensibilis est, quare cumulatio luminis una cum fixis sextae magnitudinis fere euanescit. Quodsi ergo diametrum imaginis depictae, quippe quae sola remanet, ponamus esse tertiam vel quartam partem diametri imaginis sensibilis stellae primae magnitudinis, atque hanc cum cel. IVRINO assumamus $= 240''$, diameter dispersionis ad summum erit $= 60''$ siue $= 1'$, unde mobilitas axeos radiorum & cumulatio motus tremuli imaginem sensibilem fixae primae magnitudinis sedecies redderet maiorem.

§. 1126.

§. 1126. Claritas planetarum nudo oculo visa est in ratione quantitatis luminis in oculum irruentis atque per aream imaginis sensibilis diuisae. Quodsi aperturam pupillae ponamus constantem, quantitas ista erit simpliciter ut illuminatio normalis, adeoque decrescet

1°. reciproce ut quadratum distantiae planetae a sole, siue directe ut quadratum sinus semidiametri solaris e planeta visae, quare ut numeri tabellae §. 1085.
2°. directe ut quadratum sinus semidiametri planetae adparentis e tellure visae.
3°. in ratione claritatis centralis planetae in oppositione versantis ad claritatem phaseos mediam, adeoque ut numeri tabellae §. 1050.
4°. in ratione areae disci adparentis integri ad aream phaseos adparentem.
5°. denique in ratione albedinis planetae mediae.

§. 1127. Hac ergo ratione dabitur illuminatio planetae in omni situ debita. Quaeramus v. gr. quamnam rationem inter se seruent planetae superiores, cum in oppositione simulque in distantia a tellure & a sole media versantur, sitque (§. 1085.) pro

	claritas centralis	diam. adparens
♄	0,0110	18″
♃	0,0370	46
♂	0,4307	30

atque illuminatio erit ut factum ex claritate centrali in quadratum diametri adparentis, adeoque ut numeri sequentes.

♄	- - -	3,56
♃	- -	78,19
♂	- -	387,63

siue fere ut 1; 22; 108.

§. 1128. Similiter pro Venere & Mercurio, cum dichotomi videntur, erit

	claritas centralis	diameter adparens
♀	1,9113	30″
☿	6,6735	9

Unde si claritas centralis ducatur in quadratum diametri atque factum minuatur in ratione 6666 : 4244 (§. 1050.) illuminatio erit ut numeri sequentes

♀	- -	1095,06.
☿	- -	344,11.

Ut adeo illuminatio planetis superioribus in oppositione, & inferrioribus dichotomis debita sit ut numeri

♄	- -	1.
♃	- -	22.
♂	- -	108.
♀	- -	307.
☿	- -	97.

§. 1129. Hi numeri adhuc pendent ab albedine cuiusuis planetae, adeoque a vero haud ita multum aberunt, si istam proxime eandem esse statuere liceat. Quo assumto exhibebunt rationem inter claritatem imaginis depictae (§. 1108. 1117.) & quantitatem radiorum per aperturam pupillae in retinam incidentium, atque

atque in veram claritatem planetae nudo oculo visam abibunt, si per aream imaginis sensibilis cuiusuis planetae diuidantur.

§. 1130. Cum haec area pro quouis planeta sit diuersa, facile patet, eorum claritatem nudo oculo visam non esse in ratione horum numerorum, verum magis ad aequalitatem accedent. Ponamus v. gr. diametros planetarum adparentes esse eas, quas dederunt antiquiores Astronomi, ex systemate TYCHONIS BRAHAEI pro casu praesenti erit

	diameter orbitae	diametnr planetae vera	diameter adparens	claritas
♄	$9\frac{3}{4}$	$\frac{8}{15}$	2′	1
♃	$3\frac{1}{2}$	$\frac{7}{15}$	6	$2\frac{1}{7}$
♂	$1\frac{2}{3}$	$\frac{4}{49}$	$4\frac{1}{5}$	23
☉	1	1	32	
♀	$\frac{3}{4}$	$\frac{8}{19}$	5	50
☿	$\frac{1}{2}$	$\frac{13}{180}$	$2\frac{2}{3}$	54

§. 1131. Etsi vero hae claritates ab aequalitate minus distent, quam illuminatio, nequaquam tamen ad veram accedunt. Minuenda videtur diameter adparens *Iouis* & *Veneris*, quo utriusque claritas augeatur. At cum in hisce vix quicquam statui possit, quod certius sit, rem alio modo tentabimus.

§. 1132. Eum planetam clariorem esse, qui citissime e radiis solaribus emergit, tuto assumitur. Crescit ergo eius claritas, decrescente arcu visionis. Quodsi iam arcus istos assumamus, quales eos dederunt PTOLOMAEVS,

KEPLERVS, RICCIOLVS, planetae, si claritatem adparentem spectes, hunc seruabunt ordinem

Planeta	arcus visionis
♀	5°, 0′.
☿	10, 0.
♃	10, 0.
♄	11, 0.
♂	11, 30.

§. 1133. Eundem fere hunc ordinem seruant ratione illuminationis. Hoc enim casu fere in coniunctione versantur, singulique sunt sole remotiores. Unde erit

	illuminatio	diameter adparens
♀	77	12″
☿	67	6
♃	15	31
♄	1	15
♂	7	6

§. 1134. Unus hunc ordinem turbat Saturnus, quippe qui postremus esse deberet. Dandum aliquid est diametro adparenti, & rubicundo colori Martis, quippe qui vel hanc ob caussam obscurior videtur Joue, cum uterque telluri est proximus. Ceterum probe notandum, arcum visionis diuersis anni diebus necessario diuersum esse debere, etsi constitutio athmosphaerae vel maxime ponatur eadem. Utique enim pendet ab elongatione planetae a sole. Quod sequentem in modum palam fit.

Fig. 100. §. 1135. Sit HVFN meridianus, HPF horizon, APQ aequator. Ponamus iam planetam orientem esse in 0♎ in P, situs eclipticae erit DPB, cum in D sit 0♋ & in B 0♑. Sit iam

iam sol in S, atque per S demittatur circulus verticalis VSN, erit SG arcus visionis, SP elongatio planetae a sole. At iam in G claritas horizontis maxima est, atque utrinque decrescit versus H & F. Eo igitur tardius conspicuus erit planeta, quo minor fuerit arcus azimuthalis GP, unde eo maior debet esse solis infra horizontem depressio, siue arcus visionis GS.

§. 1136. Sit iam planeta oriens in o♈, in P, situs eclipticae erit CPE. Ponamus solem esse in s, atque demisso verticali VgsN, erit gs arcus visionis, Ps elongatio planetae a sole, & gP arcus azimuthalis. Quodsi ergo uterque arcus visionis gs, GS esset aequalis, foret $gP > GP$. Unde cum hoc casu planeta esset in loco horizontis obscuriori, nil impediret, quo minus vespere citius mane tardius videretur, adeoque debebit esse $gs > GS$. Unde planeta oriente arcus visionis mensibus vernalibus maior, autumnalibus minor erit. Opposita erit ratio, si planetam occiduum spectes. Hoc enim casu arcus visionis crescet aestate decrescet hieme. Quae vero hinc pro arcu isto curatius definiendo, simulque pro claritate planetarum nudo oculo visa deduci, atque obseruationibus stabiliri possunt, ea his relinquo, qui obseruationibus astronomicis data opera incumbunt.



CAPVT III.

De lumine Fixarum earumque distantia.

§. 1137. Immensam fixarum distantiam coniecturis potius quam solidioribus ratiociniis ad mensuram notam reuocari posse, eamque continuo maiorem reperiri, quo probabiliores sint argumentationes, abunde constat. Antiquiores Astronomi eam vix tantam credere ausi sunt, quanta nunc fere constat esse distantia solis. COPERNICVS eam indefinitam relinquit. KEPLERVS ipsi tribuit 60000000 semidiametros telluris, easque adeo ponit fere 3000 vicibus remotiores sole. RICCIOLVS, assumta parallaxi fixarum annua $= 10''$, & radio orbis magni, qualem eum ponit WENDELINVS, $= 144656$ semid. terrestrium, fixarum distantiam maximam ex iis, quas ex variis variorum Astronomorum hypothesibus deduxit, ponit esse $= 604589312$ semid. telluris, siue 30000 radiis orbis magni. *Sirii* distantiam fere eandem siue $= 27664$ semid. orbis magni ingeniosissime inuenit cel. HVYGENIVS. At cum singulae istae distantiae parallaxin annuam nimiam quantam exigerent, quam uno minuto secundo minorem esse statuit cel. BRADLEIVS, exactissimis illis obseruationibus innixus, quibus aberrationem luminis detexit atque curatissime definiuit, distantiam fixarum longe maiorem esse, eamque 400000 semidiametris orbis magni haud esse posse inferiorem, assertum iuit.

§. 1138.

§. 1138. Lumen, quod noctu diffundit caelum stellatum, definire adgressus est, in tractatu, quem de cometa anni 1744. scripsit, cel. *de* CHESEAVX, atque simul coniectando assequi studuit, qua ratione debilitetur fixarum lumen, dum aetherem percurrit. Ponit vero, non modo distantias fixarum esse inaequales, verum numerum earum, quae aeque a sole distant, in eadem ratione augeri quo augetur ipsa distantia. Unde cum huic distantiae nullos ponat limites, infert, caelum noctu ita consitum videri debere stellis, ut ne punctum remaneret, quod non a fixa quadam obtegeretur, nisi admodum debilitaretur fixarum lumen.

§. 1139. At vero etsi inaequalem fixarum distantiam nemo temere neget, haud tamen concedendum videtur eas ea ratione esse in uniuerso disseminatas, quae ingeniosissimo huic Auctori arridet. Unde enim *Galaxia?* Mea quidem sententia Systema fixarum, quod se nobis spectandum sistit, haud sphaericum sed orbiculare & planum est, atque viam lacteam fixarum veluti Eclipticam esse pono. Neque enim quendam adfirmatum ire confido, immensum istum stellarum numerum, quem in hoc caeli tractu teloscopiis videmus, ita in isto esse collocatum, ut cunctae stellae quas continet, una sint & minimae, si volumen spectes, & sibi admodum vicinae, si earum a sole nostro distantiam fere aequalem, siue ut rectius loquar, haud infinite diuersam esse ponas.

§. 1140. Porro etsi cunctas istas fixas, quas intueri mortalibus datum est in unum systema complectamur, haud tamen istud erit simplex, sed ex infinitis minoribus compositum. Cunctae istae stellae, quae extra Galaxiam sitae sunt, & maiores, quae in ipso hoc tractu lucent, ad illud systema pertinent, quod solem nostrum comprehendit. Cetera systemata, quae nostro sunt propiora, in ipsa galaxia disseminata sunt. Inaequaliter vero ea disseminata esse vel inde consequitur, quod galaxiae figura admodum est irregularis, atque ista hinc inde dehiscens atque bifariam secta videatur. Solem nostrum non esse in centro sui systematis, inde colligo, quod circulus per mediam galaxiam ductus non est maximus.

§. 1141. Quodsi ergo hac ratione fixas in uniuerso spectabili collocatas atque distributas esse ponamus, quod certe a vero haud ita multum aberrabit, debilitatio, quam patitur lumen fixarum, priusquam ad nos pertingit, velut infinite minor erit ea, quam statuit cel. *de* CHESEAVX, immo eam pro fixis vicinioribus fere insensibilem statuere licet, quippe & eiusmodi fixas adhuc videmus, quae vel centies millies remotiores sunt.

§. 1142. Porro quod vel oculis patet, fixae & intensitate & colore inter se differunt, earumque splendor ab earum magnitudine vera non pendet, etsi adparens utique inde pendeat, cum ob cumulationem luminis in retina oculi maiores videri debeant illae, quae splendidiores sunt, etsi eadem esse ponatur earum distantia & magnitudo. Dantur fixae, quae

prae

prae ceteris *lucidae* vocantur, etsi vix tertiae videantur esse magnitudinis. Hae forsan ad sextam vel inferiorem adhuc dignitatem deprimerentur, si minus essent luminosae. Ob diuersum colorem diuersum ipsis influxum tribuerunt Astrologi.

§. 1143. Ob infinitam hanc diuersitatem statuere licet, dari fixas, quae soli nostro & claritate & magnitudine sunt aequales. Porro fixas primi ordinis eadem fere claritate gaudere videntur, qua gaudent planetae, si unum Hesperum excipias, & oculis nudis patet, & ex arcu visionis, quem 12 gr. esse ponit PTOLOMAEVS, haud difficulter colligitur. Idem quoque valere de magnitudine adparente ex obseruationibus antiquiorum Astronomorum pateret, nisi vel simplici obtutu euidens esset. Hi enim diametros stellarum nudo oculo aestimarunt.

§. 1144. Quae cum ita sint, distantias fixarum, certe proximarum sequenti ratiocinio coniectabimus. Ex Capite praecedente patet, definitum iri claritatem visam, si illuminatio per aream imaginis sensibilis diuidatur. Assumemus ergo fixam, quae soli nostro sit similis, si claritatem veram, planetae vero, si claritatem & magnitudinem visam spectes. His positis eadem erit area imaginis sensibilis, eademque luminis quantitas in oculum irruentis, unde eadem quoque erit illuminatio.

§. 1145. Sit iam fixae semidiameter adparens $= s$, eius claritas vera & claritas vera solis sit $= 1$, semidiameter adparens planetae $= \sigma$, semidiameter solis e planeta visa $= S$, albedo

albedo planetae $= A$, erit claritas planetae in oppoſitione verſantis centralis diſtincte viſa vel vera $= A.\sin S^2$, claritas diſci media $= \frac{2}{3}A.\sin S^2$, illuminatio hinc naſcens $= \frac{2}{3}A.\sin S^2.\sin \sigma^2$. At illuminatio fixae debita erit $= \sin s^2$. Quare cum utraque ſit aequalis, habebitur

$$\sin s^2 = \tfrac{2}{3}A.\sin S^2.\sin\sigma^2.$$

Cui aequationi, ſi nonniſi ſemidiametrum s quaeras ſequentem ſubſtituere licet,

$$s^2 = \tfrac{2}{3}A.\sigma^2.\sin S^2.$$

ſiue

$$s = \sigma.\sin S \sqrt{\tfrac{2}{3}A}$$

§. 1146. Sit iam ſemidiameter ſolis e tellure viſa media $= 16'$, ſemidiameter orbis magni $= 1$, diſtantia planetae heliocentrica $= a$, atque erit proxime

$$\sin S = \sin 16' : a.$$

adeoque

$$\sin s = \sqrt{\left(\frac{2A}{3}\right)}\sin\sigma.\sin 16 : a$$

$$s = \frac{\sigma.\sin 16' \sqrt{2A}}{a\sqrt{3}}$$

§. 1147. Quodſi iam ponamus Fixae magnitudinem veram eandem eſſe, quae eſt magnitudo ſolis, ſit eius diſtantia $= x$, atque erit

$$\sin s : \sin 16' = 1 : x$$

adeoque

$$x = a : \left(\sin\sigma.\sqrt{\frac{2A}{3}}\right)$$

§. 1148. Aſſumtis iam albedine planetarum $A = \frac{1}{7}$ quippe quae vix maior eſt (§. 1072.) diſtantiis planetarum a ſole mediis, eorumque diametris adparentibus, cum ſunt in coniun-

ctione

ctione & oppositione, & cum inferiores dichotomi videntur, sequens hinc conficitur tabella (§. 1127. 1128. 1133.)

	semid. adparens	distantia Fixae	diameter Fixae adparens
Planeta in coniunctione			
♄	15″	425100	0‴,16⁗
♃	31	112100	1 , 1
♂	6	169700	0 ,41
♀	12	40290	2 ,51
☿	6	43020	2 ,41
in oppositione			
♄	18	354200	0 ,19
♃	46	75570	1 ,32
♂	30	33950	3 ,24
Dichotomus			
♀	30	22790	5 , 9
☿	9	28900	3 ,52

§. 1149. Ex his distantiis, quae minima est fere ad eam excrescit quam ex ingeniosissimo suo experimento deduxit cel HVYGENIVS (§. 1137.) At vero hanc nimis paruam esse iam supra diximus, cum ea admissa parallaxis annua nimia quanta inde emergeret. Quodsi obseruationes consulas, planetae omnes, uno forsan Saturno excepto, fixis primae magnitudinis videntur esse vel clariores vel maiores. Utrumque euidenter constat de Ioue & Venere. Mercurius Fixis longe videtur clarior, & Mars in oppositione haerens eas magnitudine

dine adparente ſuperat. Hoc ipſo vero remouenda eſt Fixa, quo euadat obſcurior. Porro albedo Martis albedine ceterorum planetarum longe videtur eſſe inferior. Cum vero in hoc computo ſingulae albedines aſſumtae ſint aequales, facile patet hac ratione augendam eſſe diſtantiam Fixae ipſi Marti comparatam.

§. 1150. Unus itaque eſt Saturnus, cui reſpondeat Fixae diſtantia ea, quae ad verum magis accedat. Etenim arcus viſionis ipſi reſpondens arcui viſionis Fixarum primae dignitatis fere deprehenditur aequalis, quippe a PTOLOMAEO ille ponitur $=11°$, hic vero $=12°$. Quare diſtantia Fixae $=425100$ ſemid. orbitae telluris debito potius minor quam maior eſt. Quod cum exactiſſimis obſeruationibus cel. BRADLEII plane coincidit (§. 1137.)

§. 1151. Magnitudo Fixarum nudis oculis viſa non modo ab earum magnitudine & diſtantia verum vel maxime ab earum ſplendore pendet. Quo enim intenſius eſt Fixae cuiuſdam lumen, eo maior erit area imaginis ſenſibilis in retina oculi, quippe quae eadem fere ratione creſcit, qua augetur illuminatio Fixae debita. Haud ergo abſonum eſt, ſi ſtatuas, inter fixas, quae vel ſextae ſunt dignitatis, dari quaſdam, quae nobis aeque ſunt vicinae, ac eae, quibus primum tribuimus honorem. Contra ea quaedam ex his longe poſſunt eſſe remotiores, ut adeo a magnitudine adparente ad diſtantiam Fixarum vix valeat conſequentia, quae uniuerſalis ſit.

§. 1152.

§. 1152. Quodsi tamen ponamus distantiam fixae proximae esse = 500000, eamque soli nostro & magnitudine & splendore esse aequalem, illuminatio inde nascens erit ad illuminationem, quae soli debetur ut 1 ad 50000000000. Cumque supra vidimus illuminationem hanc, quae soli debetur esse ad eam, quae a luna plena proficiscitur, ut 500000 ad 1, consequens hinc erit, lumen, quod fixa ista in tellurem diffundit 500000 vicibus debilius esse eo, quod plenae lunae debemus. Ut adeo 500000 Fixae primi ordinis noctem vix aeque illuminarent, ac a luna plena illuminatur.



PHOTOMETRIAE
PARS VII.
QVA EXPONVNTVR
MODIFICATIONES ET GRADVS LVMINIS HETEROGENEI ET RELATIVI
SIVE
COLORVM ET VMBRAE.

CAPVT I.
Experimentis & calculo peruestigatur colorum claritas eorumque differentia.

§. 1153.

Quo in peruestiganda colorum diuersitate atque claritate breuioribus esse liceat, cuncta ista experimenta hic praesupponemus ceu notissima, quibus summus NEWTONVS recondidiorem eorum indolem in apricum produxit (§. 17.) Unde, cum ea ita sint euidentia, quae cuique facile sese probent, iis instar principiorum utemur, hoc tamen discrimine, ut quatenus in explicandis colorum phaenomenis atque modificationibus inter se dissentiunt NEWTONVS atque EVLERVS, quantum in nobis situm est, a neutra parte stemus, verum & in his leges Photometriae experientiae innixas tradamus. En ergo medium, quod in ardua hac re tenere propositum est.

§. 1154.

§. 1154. Primo radiorum ideam retinebimus eam, quam in superioribus (§. 43. seqq.) euolutam dedimus, unde & hic eorum *intensitatem* ab eorundem *quantitate* distinguemus, cum in computanda claritate colorum utraque seorsim spectanda veniat.

§. 1155. Porro disquirendum est, quatenus radii diuersi coloris sint heterogenei, & quatenus, si claritatem spectes, comparationem vel admittant vel respuant. Quem in finem ex experimentis iamiam laudatis sequentes hic adponemus positiones, ab omnibus facile concessas.

§. 1156. Radios luminis albi haud simplices esse, verum ex infinitis aliis constare, qui diuersi sunt coloris, diuersaque gaudent reflexibilitate & refringibilitate iam vel in vulgus notum est. Qualemcunque porro assumas hypothesin, hinc absque difficultate deduces, diuersam quoque esse eorum celeritatem. Hoc vero cum a pluribus vel negetur vel in dubium vocetur, exempli ergo ex utraque ista hypothesi deducam, cui Physici hodienum tantum non omnes fauere videntur.

§. 1157. Prima sit compositio virium, quam in theoria refractionis admittunt qui NEWTONO calculum adiiciunt. Radius AC incidat in superficiem medii densioris DB, atque refractus pergat secundum CE. Sit celeritas incidentis CA, vis inde exsurgens resoluatur in normalem AB & parallelam CB, haec non [illegible]tur, unde fiat DC = CB. Cum vero lu[illegible] refractum ad perpendiculum accedat, [illegible]is augetur. Sit ergo haec DE, atque Fig. 101.

ducta CE, erit CE celeritas, qua lumen in medio densiore procedit. Ponamus iam lumen AC esse album, radii, quibus constat in C diuidentur, atque diuergent. Ponamus porro extremos rubrorum pergere secundum CF, violaceorum secundum CE, celeritas rubrorum in medio rariori erit ad eorundem celeritatem in medio densiori ut AC ad CF. Contra ea pro violaceis eadem ratio erit ut AC ad CE. Utraque vero haec ratio utique est diuersa, quare diversa quoque est celeritas radiorum diuersi coloris.

§. 1158. Ponamus celeritatem $CA = c$, angulum incidentiae $ACB = \omega$, erit vis normalis $= c^2 . \sin \omega^2$, huic iam cum refringitur accedat augmentum $= v$, ut sit $= c^2 \sin \omega^2 + v^2 = DE^2$. Quodsi iam addatur vis parallela $DC^2 = CB^2 = c^2 . \cos \omega^2$, erit vis, qua lumen pergit secundum rectam CE,

$$= CE^2 = c^2 \sin \omega^2 + v^2 + c^2 \cos \omega^2 = c^2 + v^1$$

adeoque

$$AC^2 : CE^2 = {}^2 : (c^2 + v^2)$$

Sed CE : CA est ratio inter sinus anguli inclinationis & refractionis, quae si dicatur $= m:n$, erit

$$n^2 : m^2 = c^2 : (c^2 + v^2)$$

unde

$$c = nv : \sqrt{(m^2 - n^2)} = AC$$

$$v = \frac{c}{n} . \sqrt{(m^2 - n^2} = \sqrt{(EC^2 - CA^2)}$$

$$\sqrt{(c^2 + v^2)} = \frac{mc}{n} = CE$$

At

At iam vis lumen deflectens pro quouis colore est eadem, contra ea ratio $m:n$ variabilis est, unde & celeritas radiorum diversi coloris ex hac hypothesi prodit diuersa. Sit v. gr. medium rarius aer, densius vitrum, erit pro radiis rubris $m:n = 77:50$
violaceis $m:n = 78:50$
adeoque pro radiis
rubris $c = 0{,}854.v$ - $\sqrt{(c^2+v^2)} = 1{,}315.v.$
violaceis $c = 0{,}835.v$ - $\sqrt{(c^2+v^2)} = 1{,}303.v.$
Maior itaque & in aere & in vitro est celeritas radiorum rubrorum, ac est celeritas violaceorum, etsi posteriori casu utraque magis ad aequalitatem accedat.

§. 1159. In hoc computo animum abstraximus a diuerso globulorum volumine, cum in hac hypothesi statuendum videatur, vim eam, quae lumen deprimit, haud secus ac vim grauitatis, singulos globulos aequaliter deflectere, siue maiores siue minores sint. Porro notandum, hanc globulorum diuersitatem cum assumto eorum motu locali non necessario connexam esse, ut adeo etsi hic admittatur, illa negari possit. Quodsi tamen eam concedamus, inde quoque sequetur, globulorum celeritatem diuersam esse debere, cum ii, qui maiores sunt lentius euibrentur.

§. 1160. Eadem celeritatis diuersitas haud minus deducitur ex hypothesi cel. EVLERI, hoc tamen discrimine ut medio densiori tribuenda sit ea, quae ex hypothesi NEWTONI medio rariori tribuitur. Generaliter enim statuunt celeritatem esse in ratione sinuum in-

clinationis & refractionis, an vero ſit in ratione directa aut reciproca, hoc eſt, in quo diſſentiunt.

§. 1161. Quicquid tamen horum ſit, concedendum erit, differentiam inter celeritatem radiorum diuerſi coloris eſſe admodum paruam, ut ex ſola hac differentia vix ac ne vix heterogenea colorum indoles maximaque iſta diuerſitas deduci poſſit, quae oculis adeo manifeſto patet. Huius vero diuerſitatis ratio utique felicius explicatur ex ſyſtemate cel. EVLERI, qui eam diuerſis tonis, quibus delectatur ſenſuum primariorum alter, aurem intelligo, analogam eſſe ſtatuit.

§. 1162. Porro colores priſmatici eo ordine ſibi inuicem ſuccedunt, ut ii, qui ſunt proxime vicini, velut infinite parum differant. Etſi ergo in ſeptem claſſes diuidantur, attamen ii, qui ad eandem claſſem pertinent haud perfecte ſunt homogenei, etſi differentia eo minor ſit, quo propiores ſibi inuicem fuerint.

§. 1163. Similiter conſtat ex radiis diuerſi coloris, ſi in eodem ſpatio albo coincidant, oriri colorem, qui medium inter utroſque permixtos tenet, huncque v. gr. viridem eſſe, ſi flaui & caerulei permiſceantur, citrinum, ſi rubri & flaui, purpureum ſi rubri & violacei coincidant. At ſinguli iſti radii hoc modo conflati priſmate iterum ſeparantur, cum ſingulis diuerſa ſit refringibilitas.

§. 1164. Eodem vero modo, ſi coincidant extremi eorum, qui ad eandem claſſem referuntur, eos iterum ſeparare poteris, quippe & in his diuerſa adeſt refractio.

§. 1165.

§. 1165. Colores corporum naturalium haud esse simplices cum ope prismatis separari possint, abunde constat, dudumque hinc collegerunt, eorum superficies haud omnes radios reflectere. Quod idem hic assumemus, etsi caussa phaenomeni adhuc plane lateat.

§. 1166. Porro ex singulis experimentis, quibus exploratur illuminatio corporum, facile deducitur, lumen ab iis reflexum simpliciter esse in ratione luminis incidentis, atque hanc positionem singulis radiis diuersi coloris independenter a ceteris adplicabilem esse. Hinc est, ut corpus album constanter referat colorem luminis, a quo collustratur, coloratum vero naturalem retineat colorem, si lumini albo exponatur, eundem vero mutet, si lumen incidens haud fuerit album. (§. 764. 718.)

§. 1167. Ut ergo pro quouis colore composito definita requiritur radiorum reflexorum diuersique coloris quantitas, ita facile obuium est, hanc non modo a situ partium corporis opaci earumque indole, verum & a lumine incidente pendere, quippe alius se spectandum sistet color, siue hoc siue illam immutaueris. Quinam vero ex definita compositione radiorum simplicium oriturus sit color compositus difficilius ex theoria luminis deducetur, unde hactenus experimentis definiendus est, atque ex his petendae sunt compositionis istius regulae uniuersaliores.

§. 1168. Porro quaestio, hic ventilanda haud ultima haec est: *Quatenus claritates diuersorum colorum inter se comparari possint, siue ad iudicium*

cium oculi siue ad principia uniuersaliora recurras? Supra enim (§. 309.) diuersitatem coloris inter ea obstacula retulimus, quae comparationi claritatis, vel maxime obsunt, eamque difficiliorem atque incertiorem reddere valent, mediumque descripsimus quo difficultati isti obuiam ire licet iis saltem casibus, quibus coloris diuersitas minus est notabilis.

§. 1169. Eodem fere medio uti licebit, si uterque color notabilius fuerit diuersus, at incertius euadet oculi iudicium.

§. 1170. Ii vero colores aeque clari videntur, a quibus eodem modo afficitur oculus, eademque vi percutiuntur fibrillae. Hanc ergo vim, independenter a coloris diuersitate aequalem deprehendere debet oculus, si uterque color aeque clarus fuerit. Cumque porro sensatio ista pendeat a cumulatione motus tremuli (§. 1120.) facile patet, eam maiorem fore, quo celerius pulsus luminis sibi inuicem subsequuntur, quo densius fuerit lumen incidens, quoque maior fuerit eius celeritas. Successiuos enim esse istos pulsus concedendum est, siue motum luminis ponas esse localem siue eum undulatorium esse statuas.

§. 1171. Triplicem hanc caussam ita conflare in duas licet, ut vis, quae cuilibet radio debetur, a densitate radiorum distinguatur, quo facto, claritas coloris est functio composita ex vi cuiusuis radii & densitate radiorum eadem vi pollentium.

§. 1172. Hac ergo ratione colorum claritates inuicem conferri utique poterunt; At difficilior est determinatio ista virium & densitatis

ſitatis quorumuis radiorum, ex quibus color compoſitus eſt. Quare ad experimenta data opera hunc in finem inſtituenda recurrendum. Quid ad rem faciant XXVIII, XXVIIII & XXX, ſuo loco breuibus indicauimus (§. 759. ſeqq.) atque infra uberius explicabimus. Iam vero ſequens adponemus

EXPERIMENTVM XXXV.

§. 1173. Chartae nigrae impoſui albam craſſiorem ita ut illa proemineret neque ab hac plane obtegeretur. Iuxta eam collocaui ceram vel laccam ruberrimam, quam ad obſignandas literas adhibent, ita ut lumen in eam eadem copia & denſitate incideret, ac in chartam. Cumque hanc per priſma vitreum illam vero nudo oculo intuerer, vidi limbum chartae albae colore rubro ſuperbientem, quo vero cum colore cerae nudo oculo viſo, comparato, vix ullum rubedinis diſcrimen deprehendere valui. Eum vero quaeſiui priſmatis ſitum, qui imaginem chartae maxime eleuaret vel maxime deprimeret.

§. 1174. Cum ergo charta alba radios rubros eadem fere quantitate reflecteret, ac cera, qua uſus ſum, conſequens eſt albedinem chartae rubedini cerae fere fuiſſe aequalem. Maior enim illa eſſe debuit, cum quaedam radiorum pars ab utraque priſmatis ſuperficie reflecteretur, atque in ipſo vitro diſpergeretur. Inita vero computatione, albedinem quarta circiter parte maiorem fuiſſe collegi.

§. 1175. Simili experimento color violaceus cum albedine chartae comparari poterit.

Quodſi vero limbus chartae violaceus colore adhibito videatur clarior, ſumenda erit charta lumen minori copia reflectens, aut immutanda erit eius a candela diſtantia, quod & eo caſu faciendum erit, quo limbus chartae obſcurior eſt.

§. 1176. At vero pro coloribus priſmatis intermediis experimentum minus ſuccedit, cum iſti haud ita ſeparentur a ceteris, ac uterque extremus. Quare uniuerſalius erit ſequens

EXPERIMENTVM XXXVI.

Fig. 102. §. 1177. In pariete vel valuis feneſtrae camerae probe obſcuratae fiant duo foramina A, B, hiſque opponatur in C planum album, in D planum coloratum, v. gr. viride, utrumque a ſole aeque colluſtretur, atque lumen per foramen contiguum in cameram proiiciat. Hoc lumen in E excipiatur lente cauſtica, atque pone hanc collocetur priſma FG, ita ut radii a lente refracti, ope priſmatis ſeparentur, atque in HI excipi poſſit imago oblonga utriuſque foraminis A, B, ſiue radiorum quos utrumque planum C, D in lentem proiicit. Quo facto in H, videbuntur ſinguli colores priſmatici ab inuicem ſeparati, & in I ii, qui virides ſunt ceteris videbuntur denſiores. Quodſi iam color viridis in utraque imagine oblonga fuerit aeque clarus, hinc inferre licebit, colorem iſtum ab utroque plano C, D aeque reflecti, ſin minus, immutandus erit alterutrius plani ſitus, quo immutetur angulus incidentiae, uſque dum uterque color viridis H, I videatur

deatur aequalis, atque hoc casu albedo plani C erit ad viredinem plani D in ratione reciproca sinuum incidentiae.

§. 1178. Experimentum hoc variis modis immutari poterit. Sic v. gr. adhibere licet duas lentes, quarum altera excipiatur lumen foraminis A, altera vero lumen foraminis B. Quo facto aperturae lentium pro lubitu immutari poterunt. Porro intendi poterit utriusque plani C, D claritas, si radii solares in ea incidentes ope lentis causticæ colligantur, quo densiores incidant.

§. 1179. Cum itaque triplici modo immutari possit utriusque imaginis oblongae claritas, dabitur hinc modus definiendi quantitatem radiorum cuiuscunque coloris a quolibet pigmento reflexorum. Etsi enim planum D sit viride, attamen in K videbitur tenue lumen rubrum, cuius ergo claritas cum claritate imaginis rubrae in L comparari poterit. Radii solares in D incidentes colligantur lente caustica, atque apertura lentis, qua excipitur lumen foraminis B, sit maxima. Contra ea radii solares in C incidant nulla interposita lente, & si opus fuerit minuatur angulus incidentiae & apertura lentis, qua excipitur lumen foraminis A, usque dum utraque imago rubra sit aeque clara, quo facto, per theoremata supra demonstrata dabitur ratio inter densitatem radiorum rubrorum a plano albo C & viridi D reflexorum. Idem eodem modo procedere, si color plani D fuerit quicunque, & comparandae sint imaginis oblongae H, I par-

tes quaecunque, me non monente quilibet intelligit.

§. 1180. Computus vero, qui hic instruendus est, hoc modo absoluetur. Ponamus planum C esse eo sensu perfecte album, ut lumen in ea ratione reflectat, quae ad constituendam veram albedinem requiritur. Quo posito densitas radiorum cuiusuis coloris, quos reflectit, per unitatem efferetur, atque per has unitates definientur densitates radiorum cuiusuis coloris a pigmento D reflexorum. Ponamus v. gr. densitatem radiorum rubrorum esse $= r$. Quodsi iam lumen solare normaliter incidens sit $= 1$, sinus anguli incidentiae in C $= s$, in D $= S$, atque porro lumen in D condensetur lente caustica, per theoremata XXIII. seqq. & formulas §. 539. seqq. dabitur ratio, in qua aucta est claritas plani D, quam ponemus esse $= 1 : m$. Erit ergo claritas plani albi C, quae radiis rubris debetur $= s$, eadem claritas plani albi D radiis itidem rubris debita $= mSr$. Quodsi iam ponamus utramque lentem in E eadem gaudere distantia focali, eundemque esse pro utraque prismatis situm, claritates s, mSr nonnisi ab apertura lentium alterabuntur. Dicta ergo apertura lentis foramini D respondentis $= A$, apertura lentis alterius $= a$, atque erit claritas imaginis rubrae K $= AmrS$, imaginis rubrae L $= as$. Sed in experimento utraque fit aequalis, quare erit

$$AmrS = as$$

adeoque

$$1 : r = AmS : as$$

Undo

Unde fluit

THEOREMA LI.

§. 1181. *Densitas radiorum dati coloris a plano albo C reflexorum est ad densitatem radiorum eiusdem coloris a plano pigmentato D reflexorum, ut factum ex densitate luminis, quo collustratur pigmentum D in aream aperturae lentis, qua excipitur eius imago, ad factum ex densitate luminis, quo collustratur planum album C in aream aperturae lentis, qua excipitur eius imago.*

DEMONSTRATIO.

Est enim

$$1 : r = AmS : as$$

Sed mS, & s sunt densitates luminis in D & C incidentis, A & a areae aperturae lentium quae ipsis respondent; unde constat propositum. Ceterum conditiones theorematis iam explicatae sunt §. 1180.

§. 1182. Quodsi inaequales essent lentes adhibitae, claritas imaginis ipsis debitae computanda esset per theoremata XXIII. seqq. Similiter si diuersus esset earum situs ratione prismatis FG, radii in latera prismatis incidentes diuersa quoque ratione reflecterentur, atque definienda esset ista ratio per ea quae in P. II. C. I. & II. docuimus. Praestat ergo & lentes esse aequales, & eundem esse prismatis situm, qui commodissimus erit si utraque imago oblonga H, I fuerit in puncto regressus, siue quod idem est in maxima eleuatione vel in maxima depressione.

§. 1183. Quodsi ad illuminanda plana C, D adhibeantur specula plana parieti vel valuis adfi-

adfigenda, danda est opera, ut lumen solare sub eodem angulo in ista incidat. Quodsi secus fuerit, computanda erit diuersa luminis reflexi quantitas eo modo, quo P. III. C. I. §. 677. seqq. usi sumus. Prius tamen praestat, atque facillime obtinetur, quippe hoc unum requiritur, ut specula sibi inuicem sint parallela.

§. 1184. Si plura huiuscemodi sumantur experimenta, conuenit planum album C pro modulo assumere, eoque constanter uti. Hac enim ratione densitates luminis cuiusuis coloris a pigmento quocunque reflexi ad unam eandemque unitatem reuocabuntur.

§. 1185. Ex quo de hoc experimento cogitaui, istud instituendi defuit oportunitas, unde cautelas, quas ipsa experientia suggessisset, hic adnectere nequeo. Cameram esse debere obscurissimam, vitrum prismatis purissimum, foramina A, B probe perforata, ne lumen spurium accedat, lentis, qua condensatur lumen in D, impelluciditatem definiendam, eiusque habendam esse rationem, idem experimentum mutatis circumstantiis esse pluries instaurandum, quo ex singulis sumi possit medium, experimentum voto magis fore satisfacturum, si solis altitudo fuerit notabilior, ipseque sol in meridie versetur, haec omnia vel per se obuia sunt. Lumen candelae huic experimento instituendo non sufficere, cum nimis debilis sit illuminatio ipsi debita, experientia edoctus sum.

§. 1186. Hunc defectum, quem inuitus admitto, ut quodammodo compensarem, experi-

perimentum XXXV. sequentem in modum institui, quo densitatem radiorum rubrorum, a variis pigmentis reflexorum quodammodo definirem.

EXPERIMENTVM XXXVII.

§. 1187. Prope candelam AC horizontaliter posui planum nigerrimum EF, eique in F imposui chartam albissimam cuius longitudo GH trium fere digitorum latitudo 6 linearum. Similem chartam, sed pigmento collitam collocaui in IK, ita ut longitudo utriusque esset in directione rectae IH. Quo facto utramque chartam per prisma ipsi IH parallelum, intuens, quaesiui loca E, F, quibus utriusque chartae limbus ruber aeque videretur clarus. Quibus inuentis atque notatis, dimensus sum rectas AE, AF, AB, DC, inuenique fuisse proxime pro Fig. 103.

charta collita	AB	CD	AE	AF
aere viridi	1	1	1	3[illegible]
ochra	1	1	2	3
minio	1	$\frac{3}{4}$	2	$2\frac{1}{2}$
zinnabari	1	1	1	$1\frac{1}{2}$

ochra, qua tincta erat charta flaua illud est pigmentum, quod Königsgelb vocant.

§. 1188. Ut in hoc experimento aestimatio aequalitatis inter utramque claritatem admodum difficilis fuit, ita & mensura rectarum tantummodo obiter peracta est, unde ratio inter densitatem radiorum rubrorum proxime dabitur hoc modo. Angulos incidentiae sumsi medios BEA, BFA, itidemque medios angulos emana-

emanationis EBA, FBA, & distantias medias BE, BF, unde cum illuminatio sit directe ut sinus incidentiae, sinus emanationis, & rubedo chartae, reciproce ut quadratum distantiae, dicta rubedine chartae albae F = 1, chartae pigmentatae E = r, erit ob illuminationem aequalem

$$\frac{r AB . AE}{BE^4} = \frac{AB . AF}{BF^4}$$

$$r = \frac{AF . BE^4}{AE . BF^4}$$

Unde calculo subducto habetur rubedo

chartae albae	1
viridis	$\frac{1}{8}$
flavae	$\frac{3}{8}$
minio collitae	$\frac{3}{4}$
zinnabari collitae	$\frac{4}{7}$

Chartae caeruleo montano, Bergblau, collitae rubedo vix fuit $\frac{1}{20}$. Porro instaurando experimentum XXVI. inueni chartarum istarum albedinem siue valores literae A (§. 759.) sequentes. Pro charta

alba	A = 0,154. (§. 752.)
viridi	= 0,115. (§. 758.)
flaua	= 0,390.
minio collita	= 0,293. (§. 756.)
zinnabari collita	= 0,336.
caerulea	= 0,137.

§. 1189. Chartam albam viridem & minio pigmentatam adhibui easdem, quibus supra usus sum (§. cit.) flauam, rubram & caeruleam adiunxi, quod ex *Nouis literariis Gottingensibus* superioris anni vidi Cel. T. MAYERVM iisdem

iisdem pigmentis usum esse, pro definienda pigmentorum multifaria miscela, colorumque inde ortorum gradibus eis, quos oculos adhuc ab inuicem discernere valet. Easdem iam chartas adhibebo in experimentis sequentibus, quibus ostendam, qua ratione colores a pigmentis reflexi inuicem misceri possint, & quinam inde proditurus sit color compositus.

EXPERIMENTVM XXXVIII.

§ 1190. Experimentum IX. (§. 332.) ita instauraui, ut tabulae ABCD imponerem chartam pigmento collitam, atque in vicem rectae IK substituerem chartam alio pigmento tinctam, cuius latitudo erat fere 2 vel 3 lin. longitudo 2 aut 3 digitorum. Quo facto haud secus ac in experimento citato in LQ, LP vidi imaginem utriusque partis chartae IL, LK, illam per refractionem hanc vero per reflexionem. At, quod facile praeuideri potest, neutra pars colore naturali erat conspicua, cum color utriusque pigmenti alio alioque modo misceretur, prout mutabatur situs oculi O. Sequentes vero obseruaui miscelas. Fig. 33.

1°. Adhibita charta rubra & caerulea, imago colore mox rosaceo, mox purpureo, mox violaceo erat conspicua. Optime enim uterque color videbatur permixtus.

2°. Adhibita charta rubra & flaua, prodierunt colores imaginis varii citrini & minio similes, optime iterum permixti.

3°. Ad-

3°. Adhibita charta flaua & caerulea, quod paradoxon videbitur, imago nullo modo viridem induit colorem, verum aut erat flaua obſcurior, aut cinerea obſcurior, colorem murium, ferri & aeruginis ſpectandum ſiſtens, aut caeruleo-purpurea videbatur.

4°. Adhibita charta viridi & flaua, ſimilique modo viridi & caerulea, color imaginis ſingulas ſpecies colorum viridium a flauo ad caeruleum uſque exhibuit.

5°. Adhibita denique charta viridi & rubra, luridus triſtiſque emerſit imaginis color, veluti ex fuſco & cinereo mixtús.

§. 1191 Notandum tamen chartam viridem ſubflauam eſſe, cum aeri viridi immixtum ſit pigmentum flauum aut ſuccus ex quadam herba, quo factum eſt, ut eius color a caeruleo magis differret, propiusque ad flauum accederet.

§. 1192. Experimentum iam deſcriptum cum fere abſque ullo adparatu facillime inſtitui poſſit, ipſi diutius non immorabor. Hoc unum adiungam ope tabellae §. 443. facile inueniri rationem inter lumen, quod in tabulam vitream ſub quolibet angulo incidit, ab ea reflectitur atque tranſmittitur, adeoque hinc dari rationem inter radios, qui colorem imaginis ab utraque parte ingrediuntur, eiuſque miſcelam conſtituunt. Idem quoque obtinebitur ſequentem in modum.

EXPE-

EXPERIMENTVM XXXIX.

§. 1193. Ad valuas fenestrae camerae obscurae adplicentur duae lentes aequales A, B. His in D, E obuertantur duo plana pigmentata diuersi coloris, ita ut utriusque imago in C coincidat, ibique plano albo excipi possit. Quo facto, apertura utriusque lentis ad lubitum augeri minuiue poterit, in C obseruabitur color ex miscela radiorum utriusque imaginis nascens. Hoc experimento instituto inueni miscelam istam prorsus esse similem illi, quam in experimento praecedente descriptam dedi. Fig. 104.

§. 1194. Quodsi in C substituatur charta pigmento collita, vel plures adhibeantur lentes, facile patet, hac ratione detegi posse miscelam radiorum a quotuis pigmentis, dataque ratione reflexorum.

EXPERIMENTVM XL.

§. 1195. Obturato foramine E, in D & C collocaui chartas diuersi coloris, atque sequentes obseruaui imaginis C colores.

1°. Adhibita charta rubra & caerulea, imago C fere videbatur nigra, instar ardesiae subcaeruleae.

2°. Adhibita charta rubra & flaua, similiter flaua & viridi, caerulea & viridi, similis prodiit imaginis color, ac in experimento XXXVIII.

3°. Charta caerulea & flaua viridem exhibebant colorem fere luteum.

4°. Charta viridis & rubra colorem prorsus luteum sistebant.

§. 1196. Facile iam ex dictis deducentur varia instrumenta photometrica. Primum erit camera obscura portatilis, cui quotlibet lentes adplicari possunt, quo oculis subiiciatur color imaginum coincidentium variorum pigmentorum compositus. Lentium apertura si fiat variabilis, dabitur ratio inter quantitatem luminis, quod e quolibet obiecto camerae obscurae obuerso per aperturam intromittitur. Alterum erit Tabula, quam sistit Fig. XXXIII. cui si adplicetur quadrans nigro colore collitus vel imbutus, cuius centrum sit H, ibique adplicetur regula dioptris instructa, facile dabuntur anguli, sub quibus in tabulam vitream EFGH incidunt radii colorati IQ, MR, NQ, KR, imaginem mixtam costituentes.

§. 1197. Simili modo radii PO, QO reflexi & refracti in O lente caustica excipi poterunt, ut imago in camera obscura in plano albo vel pigmentato, quod ipsi obuertitur, depicta spectanda sit. At his fusius prosequendis non immorabimur, quippe facillime plura huiuscemodi instrumenta quilibet sibi parabit.

§. 1198. Videamus iam, qua ratione claritas pigmentorum quorum alia ab aliis collustrantur, calculo prosequenda sit, atque primo quid in casu illuminationis absolutae obtineat. Experimentis hactenus prolatis manifestum est, pigmenta quaelibet singulos quidem colores, sed in diuersa sibique propria ratione reflectere. Porro quod supra iam notauimus (§. 1170. seqq.) claritas pigmenti est functio composita ex vi cuiusuis radii & densitate radiorum eadem vi pollentium. Quare clari-

tatem

tatem istam per spatium cuiusdam curuae ita exhibebimus, ut de unitatibus constet, quibus in calculo utendum est.

§. 1199. Vim radiorum referant abscissae AP, ita ut AB sit minima, AC maxima. Quantitatem eorum qui eadem vi gaudent, referant ordinatae BD, PM, CS, atque facile patet spatium BDEC fore summam virium, adeoque claritatem, quae inde nascitur, quaque pigmentum spectabile est. Fig. 105.

§. 1200. Ponamus iam ordinatas curuae DME referre quantitatem radiorum eam, quae ad constituendam albedinem perfectam requiritur, atque curua ista instar moduli erit, quo definietur claritas cuiusuis pigmenti.

§. 1201. Obiiciatur enim pigmentum quodcunque lumini perfecte albo, ut ab hoc absolute collustretur, atque ponamus ordinatas FNG referre quantitatem radiorum quorumuis a dato pigmenti spatio $=1$ reflexorum, erit spatium FNGCB summa virium, adeoque claritas pigmenti istius a lumine perfecte albo absolute collustrati.

§. 1202. Porto ratio inter ordinatas homologas utriusque curuae PM:PN erit eadem, quae est inter radios incidentes & reflexos, quaeque pro qualibet radiorum specie constans est.

§. 1203. Quodsi ergo pigmentum istud obuertatur lumini cuius claritatem referat curua HQI, atque claritas pigmenti absolute illuminati exhibebitur per curuam KRL, eritque

$$PM:PN = PQ:PR$$

Ut adeo datis tribus curuis DME, FNG, HQI, ope huius analogiae detur quarta, cuius ſpatium erit celeritas pigmenti a lumine HQI abſolute illuminati.

§. 1204. Quodſi illuminatio haud fuerit abſoluta, ſpatium totum BKLC minuendum erit in eadem ratione, in qua imminuta eſt ipſa illuminatio. Haec vero ratio per ea theoremata, quae in Parte I. & II. huius operis demonitrata dedimus, facile definietur.

§. 1205. Spatium curuae BDEC, quod claritatem luminis perfecte albi refert, hic nobis erit inſtar unitatis, ad quam reuocanda ſunt ſpatia ceterarum curuarum, ut claritates, quas exhibent ad unam eandemque unitatem reducantur. Unitas vero iſta vel neceſſario arbitraria eſt (§. 709. 779.) unde pro quolibet caſu ad lubitum aſſumi poterit.

§. 1206. Porro utraque curua DME, FNG in unam conflabitur quoties tantum quaeratur ratio inter ordinatas PM : PN. Sit iſta STV atque erit

$$PS = PN:PM$$
$$PR = PQ.PS$$

Denotabunt itaque ordinatae PS rationem inter radios cuiuſuis ſpeciei in datum pigmentum incidentes, ab eoque reflexos.

§. 1207. His ita praemiſſis, ſequentes aſſumemus notiones in anteceſſum definiendas, quo in ſequentibus breuioribus eſſe liceat.

1°. Abſciſſas $AP = x$ ſimpliciter *ſpeciem radiorum* vocabimus, quippe diuerſam eorum vim referunt, qua oculi retinam feriunt.

2°. Ad-

2°. Adplicatas PS curuae TSV vocabimus *vim pigmenti reflectentem*, quippe rationem inter species incidentes & reflexas denotant.

3°. Quodsi porro ordinatae PQ, PR, PS dicantur λ, p, v, spatia tota curuarum respondentium efferemus per $\int \lambda dx$, $\int p dx$, $\int v dx$, eritque ergo $\int \lambda dx$ *color luminis collustrantis*, $\int p dx$ *color pigmenti ab eo absolute collustrati*, $\int v dx$ *summa virium reflectentium pigmenti.*

§. 1207. Cum ergo sit (§. 1205.)

$$p = v\lambda$$

erit

$$\int p dx = \int v \lambda dx$$

Ut adeo color pigmenti detur per colorem luminis, a quo absolute collustratur, & vim reflectentem, quae pigmento propria est.

§. 1208. Hinc iam facile definietur valor literae A, quem in experimentis XXVIII. & seqq. adhibuimus, quemque in hoc capite definitum dare promisimus (§. 762.) Sint ergo in Fig. 70. omnia ut in §. 726. seqq. Utrumque planum G, FD sit eodem pigmento collitum. Summa virium reflectentium pigmenti vocetur $\int v dx$, color luminis L, quod itidem hic sphaericum esse ponemus, sit $= \int \lambda dx$. Ponamus iam pigmentum ab isto lumine absolute collustrari, facile patet eius colorem futurum fore $= \int v \lambda dx$. Similique modo si pigmentum FD a pigmento G absolute collustretur, erit color pigmenti FD $= \int v^2 \lambda dx$. Fig. 70.

§. 1209. At vero in experimentis iſtis illuminatio haud fuit abſoluta, quare colorum $\int v\lambda dx$, $\int v^2\lambda dx$ claritas debite erit immutanda, quo habeatur color ille, qui fuit in punctis G, D, F. Dicta ergo impelluciditate lentis AB $= \varkappa$ (§. 741.) erit color

$$\text{plani}\, G = \int v\lambda dx : GL^2$$

$$\text{plani}\, D = \int v\lambda dx : LD^2$$

$$\text{imaginis}\, F = \frac{\varkappa . \text{tang}\, AFC^2}{LG^2 \text{sec}\, AGC^2} . \int vv\lambda dx$$

At in experimento uterque color in D & F fuit aeque clarus, quare erit

$$\frac{\int v\lambda dx}{LD^2} = \frac{\varkappa . \text{tang}\, AFC^2}{LG^2 . \text{sec}\, AGC^2} . \int v^2\lambda dx.$$

Unde habetur

$$\frac{LG^2 . \text{sec}\, AGC^2}{LD^2 . \varkappa . \text{tang}\, AFC^2} = \frac{\int v^2\lambda dx}{\int v\lambda dx} = A (\S. 738.)$$

Eſt ergo A ratio inter colorem plani G a lumine L abſolute colluſtrati & colorem plani FD a plano G abſolute colluſtrati. Ut adeo, *dicta quantitate radiorum ea ratione permixtorum, qua in F incidunt,* $= 1$, *quantitas eorum, qui a plano F reflectuntur, erit* $= A$, *quomodocunque iam inuicem permixti ſint.* (§. 762.) Curatius tamen hanc poſitionem efferes, ſi in vicem quantitatis radiorum ſubſtituas ſummam virium, quippe haec illi non exacte eſt proportionalis (§. 1161.)

§. 1210. Quodſi aſſumere liceat radios Fig. 105. eiuſdem coloris eadem vi gaudere, ſiue ex ſumma virium ſumi poſſe mediam, curuae, quas ſiſtit figura CV. non erunt continuae, verum ſeptem tantum dabuntur abſciſſae totidem-

tidemque ordinatae ipſis reſpondentes. Quare hac ratione delabemur ad calculum quantitatum diſcretarum, quem ſequentem in modum concinniorem reddemus.

§. 1211. Quantitates radiorum rubrorum, citrinorum &c. quibus lumen L conſtat denotentur literis R, A, F, V, C, P, W, vires pigmentorum G, D reflectentes eodem ordine vocentur r, a, f, v, c, p, w, ut color luminis ſit $= R + A + F + V + C + P + W$, eritque color pigmenti G vel D abſolute illuminati $= rR + aA + fF + vV + cC + pP + wW$, qui dicatur $= \overset{\cdot}{\eta}$. Fig. 70.

§. 1212. Ponamus ſimile pigmentum a pigmento G itidem abſolute colluſtrari, erit color hinc naſcens

$$\overset{\cdot\cdot}{\eta} = r^2 R + a^2 A + f^2 F + v^2 V + c^2 C + p^2 P + w^2 W.$$

Similiterque color pigmenti tertii a ſecundo hoc abſolute colluſtrati erit

$$\overset{\cdot\cdot\cdot}{\eta} = r^3 R + a^3 A + f^3 F + v^3 V + c^3 C + p^3 P + w^3 W.$$

§. 1213. Quodſi eodem modo continuo colluſtretur pigmentum quartum a tertio, quintum a quarto &c. erit color pigmenti nti

$$\overset{n}{\eta} = r^n R + a^n A + f^n F + v^n V + c^n C + p^n P + w^n W.$$

Hanc formulam ad caſus quoſdam ſpeciales ita adplicabimus, ut quae inde deducentur facile ad caſum praecedentem, quo colores iſtos per curuas exhibuimus, transferri poſſint.

§. 1214. Si pigmentum fuerit perfecte album, ſiue omnes radios in eadem ratione reflectat, in qua incidunt, hoc caſu erit $r = a = f = v = c = p = w$, adeoque

$$\overset{n}{\eta} = r^n (R + A + F + V + C + P + W.)$$

Quotcunque ergo fiant luminis reflexiones, pigmentum constanter spectandum erit colore ipsius luminis L, etsi continuo debilior euadat eius claritas, nisi pigmentum fuerit absolute album, quippe hoc casu est $r = a = f =$ &c. $= 1$.

§. 1215. *Si ex rationibus r, a, f &c. quaedam fuerit ceteris notabiliter maior, pigmentum continuo magis ad eum colorem accedet, ad quem ista ratio est referenda, quo magis iterentur reflexiones.* Crescunt enim singuli termini formulae η^n (§. 1213.) ut potestates rationum r, a, f &c. numero reflexionum aequales, adeoque eo celerius, quo maiores fuerint istae rationes. Sic v. gr. si pigmentum fuerit zinnabaris, ratio r ceteras longe excedit, ut adeo in quarta aut quinta reflexione termini formulae (§. 1213.) primum sequentes fere euanescant. Manifesto hoc patuit institutis experimentis XXVIII. seqq. iisque similibus (§. 1188.) Quippe adhibitis chartis minio, aerugine cupri, zinnabari, succo baccarum rhamni collitis, imago F notabiliter ad colores simplices prismaticos accessit, etsi unica tantum facta fuerit reflexio.

§. 1216. Daretur ergo hinc methodus colorem pigmenti primarium a ceteriis, qui veluti accessorii sunt, ita separandi, ut tandem fere solus remaneret, si continua effici posset illuminatio ab absoluta parum recedens. Hoc vero nullo modo obtinere licuit.

§. 1217. Quodsi quodam casu fuerit $R = A = F =$ &c. formula generalis abibit in sequentem

$$\eta^n = R\,(r^n + a^n + f^n + \gamma^n + c^n + p^n + w^n)$$

Ratio-

Rationes r, a, f, v &c. ſpectentur ceu radices aequationis ſeptimi gradus

$$x^7 - \alpha x^6 + \beta x^5 - \gamma x^4 + \delta x^3 - \varepsilon x^2 + \zeta x - \varphi = 0$$

atque per formulas NEWTONIANAS erit

$$\overset{\prime}{\eta} = \int x = \alpha$$

$$\overset{\prime\prime}{\eta} = \int x^2 = \alpha \int x - 2\beta$$

$$\overset{\prime\prime\prime}{\eta} = \int x^3 = \alpha \int x^2 - \beta \int x + 3\gamma$$

$$\overset{\prime\prime\prime\prime}{\eta} = \alpha \int r^3 - \beta \int r^2 + \gamma \int r - 4\delta$$

$$\overset{\text{V}}{\eta} = \alpha \int r^4 - \beta \int r^3 + \gamma \int r^2 - \delta \int r + 5\varepsilon$$

&c.

Quare ſi experimentis dentur colores $\overset{\prime}{\eta}$, $\overset{\prime\prime}{\eta}$, $\overset{\prime\prime\prime}{\eta}$, &c. $\overset{\text{VII}}{\eta}$, ope huius formulae facile dabuntur coefficientes aequationis α, β, γ, δ &c. atque inde elicientur radices ipſae, quae rationem inter colores incidentes & reflexos exhibent. At vero cum rationes iſtae experimento ſupra deſcripto (§. 1179. ſeqq.) commodius detegantur, huic methodo fuſius exponendae non immorabimur. Alia experimenta huc facientia, cum principia, quibus nituntur, hic deſint, in *Pyrometria* occurrent.

CAPVT II.

Calculo definiuntur modificationes umbrae eiuſque gradus.

§. 1218. Corpora opaca lumen intercipere, iisque id effici, ut ea obiecta, quae a lumine directe colluſtrari poſſent, interpoſito corpore opaco, obſcureſcant, lumi-

neque vel plane vel ex parte priuentur, experientia quotidiana docet. Priuatio iſta luminis, ſi partialis fuerit *umbra* audit, ſi abſolute totalis, *tenebrae* adeſſe dicuntur.

§. 1219. Vox umbrae mere eſt relatiua, atque ideam luminis inuoluit, a quo procedit, ſiue cuius priuationem conſtituit. Tot enim idem corpus umbras habere dicitur, quot fuerint lumina quorum radios intercipit. Porro *ſenſibilis* erit umbra, ſimulac locus obumbratus ita fuerit obſcurior ut differentia claritatis inter locum iſtum & loca non obumbrata oculis percipi poſſit.

§. 1220. Quatenus corpus opacum omnes radios intercipit, umbra erit *totalis*, contra ea aderit *penumbra*, ubi nonniſi pars radiorum intercipitur. Utraque vero haec idea iterum ad unum idemque lumen ſeorſim refertur, & ſi ad morem loquendi communem attendas, lumen iſtud ceteris clarius, umbra atque penumbra ſenſibilis, atque praeſentia luminis & corporis lumen intercipientis manifeſta eſſe debet. Sola enim claritatis differentia independenter ab umbra adeſſe poteſt, cum obtineat, imminuto angulo incidentiae vel luminis diſtantia. Porro ita opponitur umbra tenebris, ut loca umbroſa non ſint omni claritate prorſus deſtituta, abſolutiſſimam vero hanc priuationem lumiuis tenebrae requirant. Etſi latiori ſenſu & illa loca tenebris obtecta dicantur, in quibus nulla obiecta perciperc atque ab inuicem diſcernere valet oculus.

§. 1221. Ita quidem res ſe habet, ſi uſum loquendi communem ſpectes, quippe qui ad oculi

oculi iudicium cuncta refert. At in re optica & photometrica ratio audienda est. Quo fit ut strictioribus istae notiones circumscribantur limitibus, ut quid sibi velint, liquido constet. Hinc enim omnis priuatio luminis umbra dicetur, siue ista sit sensibilis, siue visui sese subducat, atque tunc demum tenebrae adesse dicentur, ubi absolutissima fuerit luminis absentia, absolutissimaque priuatio.

§. 1222 Varii gradus claritatis vel obscuritatis umbrae & penumbrae pendent a lumine, quod in loca umbrosa aliunde incidit, siue id fiat directe, siue per reflexionem & refractionem. Hac ergo ratione theoria graduum umbrae uno velut actu ad theoriam illuminationis in superioribus uberius expositam reducitur. Quare ne tota ista hic repetatur, rem omnem uno alteroue exemplo illustrabimus.

§. 1223. In campo aperto sit murus indefinitae longitudinis AB, umbram solis in partem DE proiiciens atque querenda sit umbrae claritas in dato quouis puncto E, cum non nisi a caelo sudo collustratur. E puncto E agatur normalis DE, ipsique insistat verticalis DC atque ducta CE, erit CED altitudo muri adparens maxima. Quodsi iam E ponatur esse centrum sphaerae, atque in huius superficiem proiiciatur recta AB, adscindet circulum sphaerae maximum, similemque abscindet basis muri FG. Prior horum circulorum sit QE, posterior BE, atque erit EQB dimidia pars hemisphaerii caeli a muro obtecta, unde lumen caeli in datum punctum incidens, erit illud quod

Fig. 106.

Fig. 15.

quod debetur reliquae parti caeli AEQC, adeoque vi theorematis XII. (§. 145.) definietur sequentem in modum.

§. 1224. Claritas caeli sudi media vocetur $=c$, albedo campi obumbrati $=A$, erit eius claritas, cum a toto caeli hemisphaerio, siue absolute illuminatur $=cA$. Est vero illuminatio absoluta ad illuminationem puncti ACQE utrinque debitam ut π ad $\frac{1}{2}\pi$ $(1+\sin CQ)$ adeoque erit claritas puncti dati

$$u=\tfrac{1}{2}cA(1+\sin CQ)$$

siue si ad figuram CVI. reuertamur

$$u=\tfrac{1}{2}cA(1+\cos CED)$$

Ponatur verticalis $CD=1$, ipsique insistat semicirculus CHD, ducta porro CH erit

$$u=\tfrac{1}{2}cA(CD+DH)$$

siue cum sit

$$\tfrac{1}{2}(1+\text{cosin } CED)\cos\tfrac{1}{2}CED^2$$

erit

$$u=cA.\cos\tfrac{1}{2}CED^2.$$

Unde liquet

THEOREMA LII.

§. 1225. Claritas umbrae solaris, quam in campo aperto proiicit murus horizontalis indefinitae longitudinis est factum ex claritate caeli media, albedine campi & quadrato cosinus dimidiae eleuationis muri maximae adparentis CED.

Fig. 107. §. 1226. Spatium campi aperti ADEG ab utroque muro contiguo ABCFED obumbretur, atque quaerenda sit claritas umbrae in dato quouis puncto G. Ductis iterum normalibus GL, GH, erectisque verticalibus LK, HI, ducantur porro AG, BG, KG, CG, IG, FG,

FG, EG, DG, atque pyramides umbrosae ABCDG, CDEFG productae in hemisphaerio caeli abscindent partem eam, quam obtegit uterque murus, cuiusque adeo lumen in G non incidit, atque muri AC, CE in hemisphaerio obtegent quadrilatera quale in figura XV. est FGMP. Dicta ergo illuminatione absoluta $=\pi$, erit (§. 149.) illuminatio quadrilatero Fig. 15.
isti debita

$$=\tfrac{1}{2}FP-\tfrac{1}{2}GM.\cos GEF$$

Unde si ad figuram CVII. reuertamur, erit pars illuminationi absolutae detracta

a muro ABCD $=\tfrac{1}{2}AGD-\tfrac{1}{2}BGC.\cos KGL$

a muro CDEF $=\tfrac{1}{2}DGE-\tfrac{1}{2}CGF.\cos IGH$

Quare illuminatio residua erit $=\pi-\tfrac{1}{2}(AGD+DGE)+\tfrac{1}{2}BGC.\cos KGL+\tfrac{1}{2}CGF.\cos IGH$.

§. 1227. Hinc iam habebitur claritas puncti G, si illuminatio ista minuatur in ratione $\pi : cA$, quare erit

$$v=c.A-c.A\frac{(AGD+DGE)}{2\pi}+\frac{BGC.\cos KGL.cA}{2\pi}+\frac{CGF.\cos IGH.c.A}{2\pi}$$

§. 1228. Quodsi uterque murus fuerit infinite extensus, sibique inuicem parallelus, anguli ADG, DGE, BCG, CGF abeunt in semicirculos, eruntque ergo $=\pi$, quare formula ita contrahetur

$$v=\tfrac{1}{2}c.A(\cos KGL+\cos IGL)$$

§. 1229. Quodsi muri alterutrius quaedam pars a sole directe collustretur, umbrae claritas augebitur, atque data claritate vel albedine muri, incrementum istud claritatis haud

secus

fecus definietur, orietur enim triangulum vel quadrilaterum, quod fi in fphaeram transferatur, illuminatio ipfi debita dabitur per §. 150. feqq.

§. 1230. Definienda fit umbra folaris in dato puncto camerae E, quod nonnifi per feneftram apertam ABCD a caelo fudo vel nubibus aeque albidis obducto colluftratur. Ducta iterum normali EF, erectaque verticali FGH, ducantur rectae GE, HE, AE, BE, CE, DE, atque erit ABCDE pyramis luminofa, per quam lumen caeli in E coincidit. Quare dicta illuminatione abfoluta $=\pi$, vi eiufdem theorematis XII. erit illuminatio debita (§. 149.)

Fig. 108.

quadrilatero AIKB $=\frac{1}{2}$IEK $-\frac{1}{2}$AEB.cofHEF
quadrilatero DIKC $=\frac{1}{2}$IEK $-\frac{1}{2}$DEC.cofGEF

adeoque illuminatio feneftrae debita

$$=\tfrac{1}{2}\text{DEC.cofGEF}-\tfrac{1}{2}\text{AEB.cofHEF}$$

Haec in ipfam claritatem puncti E abibit, fi minuatur in ratione $\pi : cA$, erit ergo claritas in E

$$u=\frac{c.A}{2\pi}(\text{DEC.cofGEF}-\text{AEB.cofHEF})$$

§. 1231. Haud abfimili modo definietur umbra folaris datis quibufuis partibus hemifphaerii caeli debita. Claritatem caeli fudi mediam ad claritatem folis fe habere vidimus ut 1 ad 277000. (§. 914.) Ut adeo hac affumta, claritas umbrae cum claritate loci a fole colluftrati definiri poffit.

§. 1232. Ponamus v. gr. punctum quoddam fuperficiei horizontalis ita obumbrari, ut a toto

a toto caeli hemisphaerio collustretur, ea tantum parte excepta, quam discus solaris occupat. Hac ergo ratione obtinebit illuminatio fere absoluta. Dicta ergo claritate solis $=C$, claritate caeli sudi media $=c$, semidiametro solis adparente $=s$, atque erit illuminatio caelo debita ad eam quae soli debetur ut c ad $C. \sin s^2$. Quodsi ergo fuerit $s=16'$, & $c:C = 1:277000$, ratio ista erit $=1:6$. Quare claritas, quae debetur soli claritatem hemisphaerio caeli sudi debitam fere sexies superat, ut adeo sexta fere parte clariora sint loca, quae & a sole & a toto caelo collustrantur, ac ea, quae nonnisi a sole collustrantur. Ceterum hanc rationem admodum variabilem esse supra vidimus (§. 910. 913)

§. 1233. Calculus, quo definitur claritas penumbrae, ab eo quem hactenus exemplis illustrauimus, plane non differt. Cum enim loca quaedam ideo ex parte tantum obumbrentur, quod radii, quos obiectum luminosum in ista proiiceret, nisi obstaculum obesset, ex parte intercipiantur, atque obiectum luminosum, qua late patet, videri nequeat, verum ex parte obtegatur; pars ista obtecta spectanda est, quasi non adesset, unde quaerendo illuminationem parti non obtectae debitam, habebitur penumbrae claritas. Unde vel per se patet, hac ratione rem omnem ad illuminationem directam reductam esse. En exemplum illustrius.

§. 1234. Quaerenda sit claritas penumbrae in ecclipsi lunari obseruandae. Sit S sol, AB eius diameter, TDV tellus, PQ orbita lunae. Fig. 109.

Ducan-

Ducantur axis SDC, tangentes ATC, BVC, AVQ, BTP, erit ACB conus umbrosus NO diameter umbrae totalis, PQ diameter penumbrae PQK. Porro est ATB diameter solis adparens e tellure visa, PTQ diameter adparens telluris e luna visa siue dupla parallaxis horizontalis. Est vero

$$PTQ = TQV + ATB + TAV$$
$$AT2 = PTN$$

unde neglecto angulo TAV, erit

$$PTQ = TQV + PTQ$$

Quare diameter penumbrae est summa diametri telluris e luna visae & diametri solaris adparentis. Porro angulus PTN est differentia semidiametrorum umbrae totalis & penumbrae, atque diametro solis aequalis.

§. 1235. Sit iam M punctum in superficie lunae, ducantur tangentes MTt, MVv, erit circulus tv discus telluris e luna visus atque in discum solis proiectus, lunula BSv pars disci solaris radios in M diffundens, pars lentiformis Av ea est, quae a tellure est obtecta, visuique spectatoris in M subducta. Est vero

$$MVQ = AVv$$

Quare angulus elongationis puncti M ab extremitate penumbrae Q aequalis est latitudini adparenti partis obtectae Av.

§. 1236. At iam quantitas luminis in M incidens est in ratione areae disci solis non obtecti siue lunulae BSv, quam ergo medium quoddam sumendo sequenti ratione definiemus.

§. 1237. Diametrum disci solaris AB diuidemus in 12 partes aequales siue digitos, atque

que facile patet in totidem partes diuidendam esse differentiam semidiametrorum utriusque umbrae PN siue OQ. Quo facto erit MQ totidem digitorum, quot habet latitudo partis solis obtectae Av.

§. 1238. Porro aream disci solaris ponemus $=1$, atque hac ipsa unitate designabimus claritatem loci M non obumbrati, atque aream partium disci solaris non obtectarum.

§. 1239. Sit iam
diameter telluris $tMv = 1°, 52'$
solis $ATB = 0, 32$
erit
diameter penumbrae $PTQ = 2, 24$
umbrae totales $= 1, 20$
unde
$vt : AB = 7 : 2$

§. 1240. Ducta chorda communi KL, erit KvL segmentum disci telluris, KAL segmentum disci solaris, utriusque vero summa est pars solis obtecta. Quare ex assumta aera circuli KBL, ratione inter diametros AB, tv, & latitudine Av, dabitur area spatii AKvL. Hanc ergo pro singulis digitis partium Av siue MQ in tabella sequente ob oculos ponemus.

Bv, OM digit.	area AKvL siue claritas penumbrae	Av, siue QM digit.
0	0,000	12
1	0,029	11
2	0,082	10
3	0,149	9
4	0,239	8
5	0,339	7
6	0,437	6
7	0,542	5
8	0,655	4
9	0,759	3
10	0,864	2
11	0,949	1
12	1,000	0

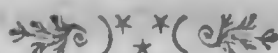
§. 1241. Diuisa ergo differentia umbrarum OQ in duodecim partes aequales (§. 1237.) atque pro quouis loco disci lunaris M ope huius tabellae dabitur claritas penumbrae. At probe notandum umbras NO, PQ non esse eas quae obseruantur, verum eas quas prodit calculus ecclipseos lunaris. Etenim facile ostendetur, utramque vel necessario debere esse diuersam.

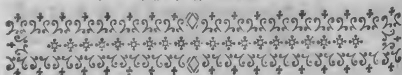
§. 1242. Patet enim ex hac tabella initium penumbrae siue loca limbo QP viciniora adeo parum differre a claritate lunae a toto disco solari collustratae, ut differentia ab oculo discerni plane non possit (§. 265. seqq.) Quare penumbrae initium & finis minus ab inuicem videbuntur distare, ac reuera distant.

§. 1243.

§. 1243. Porro penumbra in O & N ipsi umbrae totali ita fit similis, ut verum initium umbrae oculi aciem effugiat, siue ista absoluta sit tenebrosa, siue ipsi misceatur lumen per athmosphaeram refractum (§. 270.) Quare vel necessario pars quaedam penumbrae ipsi umbrae totali accenfetur, atque hoc ipso, si ex obseruationibus istis quaeras diametrum athmosphaerae telluris lunam obumbrantis, hanc inuenies debito maiorem. Ponamus oculum eas claritates aequales habere, quae trigesima parte differunt, ex tabella §. 1240. patet fore $ON = 1$ dig. unde posita diametro solis $= 32'$, uni digito respondebunt $2\frac{2}{3}$ min. Est vero semidiameter telluris adparens $tv = 56$ min. Quare si penumbra, cuius claritas est $= \frac{1}{30}$, ipsi umbrae totali accenseatur, inde aucta erit semidiameter telluris parte $2\frac{2}{3} : 56 = \frac{1}{21}$. At vero haec omnia, quae de limitibus umbrarum breuibus hic notauimus, ex ipsis ecclipsium obseruationibus curatius definientur.





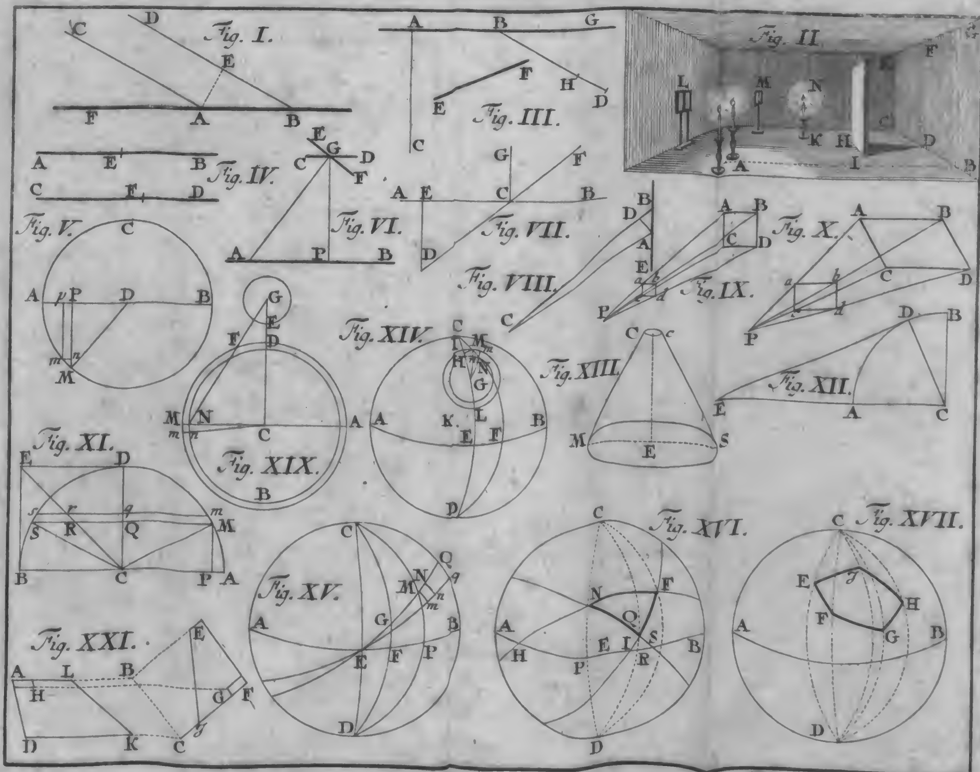


INDEX RERVM.

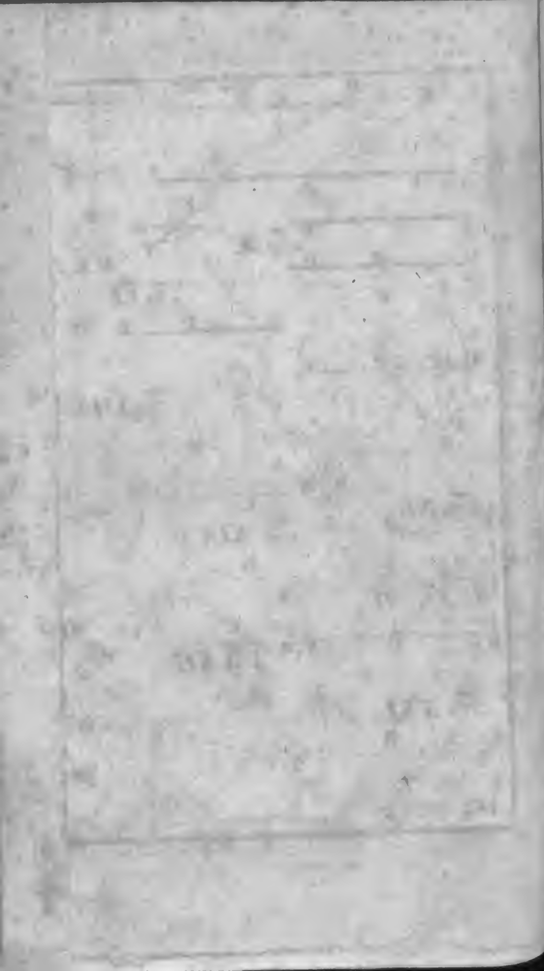
Angu-

Limi-

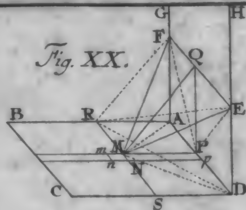
expe-

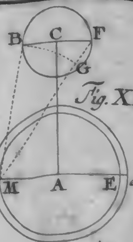


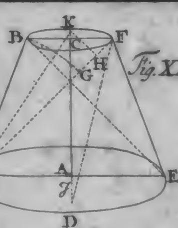
Photometriae Tab. I.

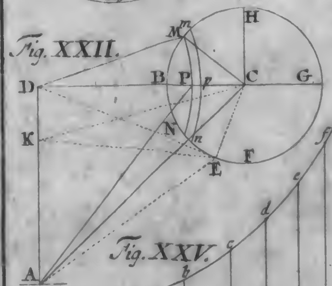


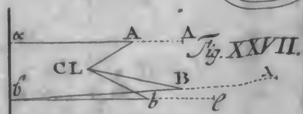

C M m g G P L A B E F D
Fig. XVIII.

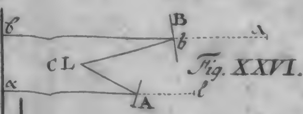

G H F Q E B R A m M n N P q C S D
Fig. XX.

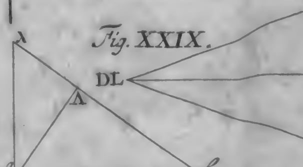

B C F G m M A E e
Fig. XXIII.

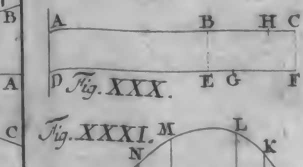

K B C F H G M A E D
Fig. XXIV.


Fig. XXII.
M m H D B P p C G K N n E F A
Fig. XXV.

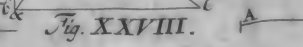

α A A CL B b l
Fig. XXVII.


B b CL α A l
Fig. XXVI.

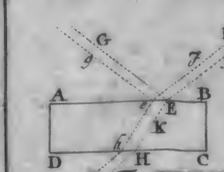

Fig. XXIX.
B DL A C λ Λ l


A B H C D E G F
Fig. XXX.
Fig. XXXI.
M L N K

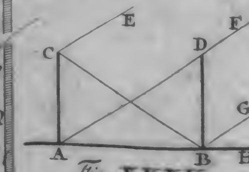

A B C D E F


Fig. XXVIII.


A B P Q C R S D


G g F f A E B K D H C
Fig. XXXII.


O M K H F D B A P N L I G E C Q
Fig. XXXIV.


E F C D G A B H
Fig. XXXV.



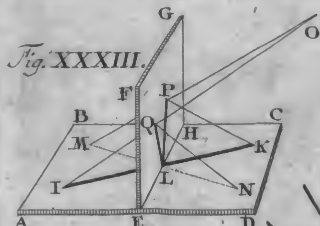


Fig. XXXIII.

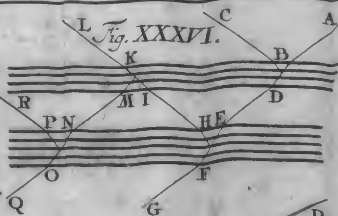


Fig. XXXVI.

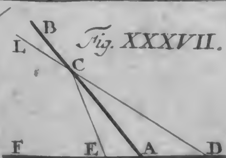


Fig. XXXVII.

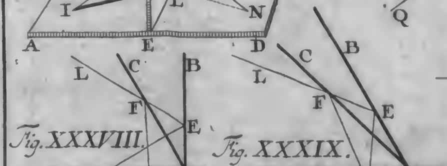


Fig. XXXVIII.

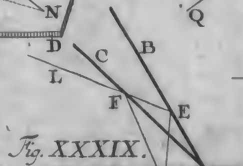


Fig. XXXIX.



Fig. XLI.



Fig. XL.

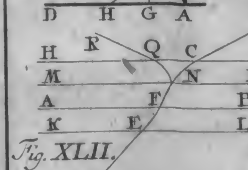


Fig. XLII.

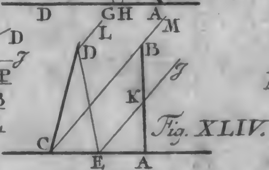


Fig. XLIV.

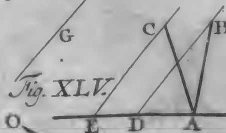


Fig. XLV.

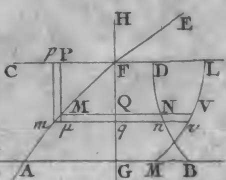


Fig. XLIII.

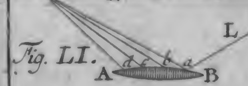


Fig. LI.

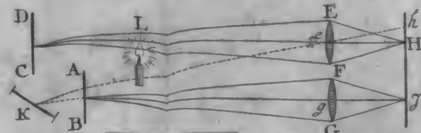


Fig. XLVIII.

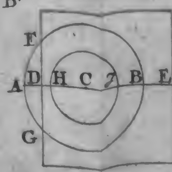
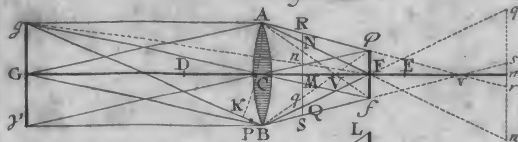
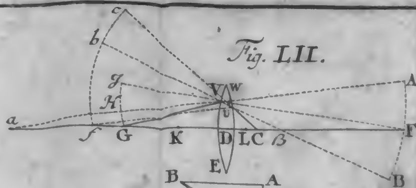
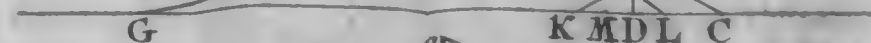


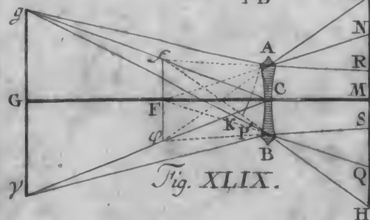
Fig. XLVII.

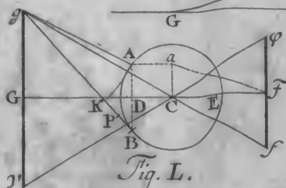


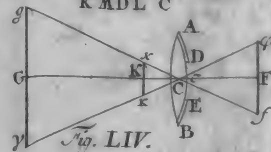

Fig. XLVI.

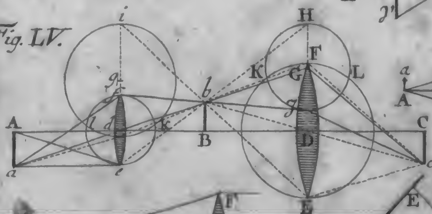

Fig. LII.

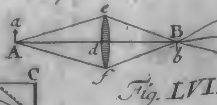

Fig. LIII.

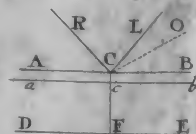

Fig. XLIX.

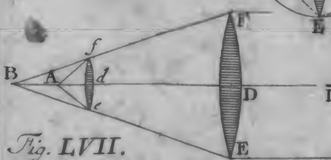

Fig. L.


Fig. LIV.


Fig. LV.


Fig. LVI.


Fig. LVIII.


Fig. LVII.

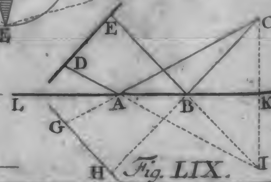
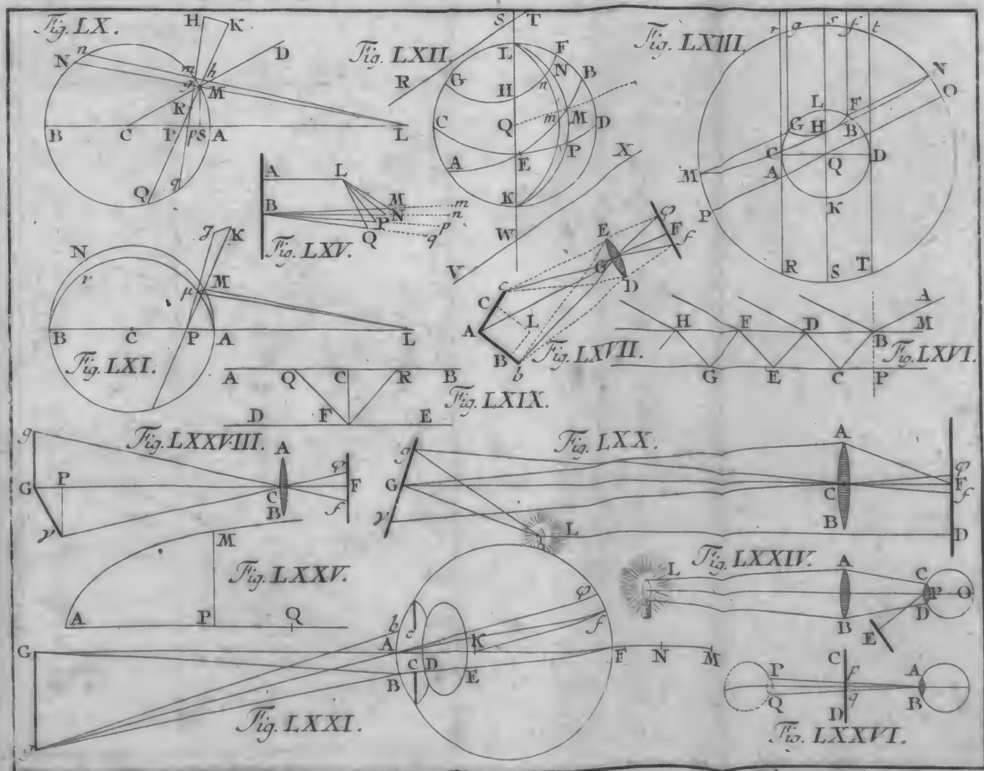

Fig. LIX.

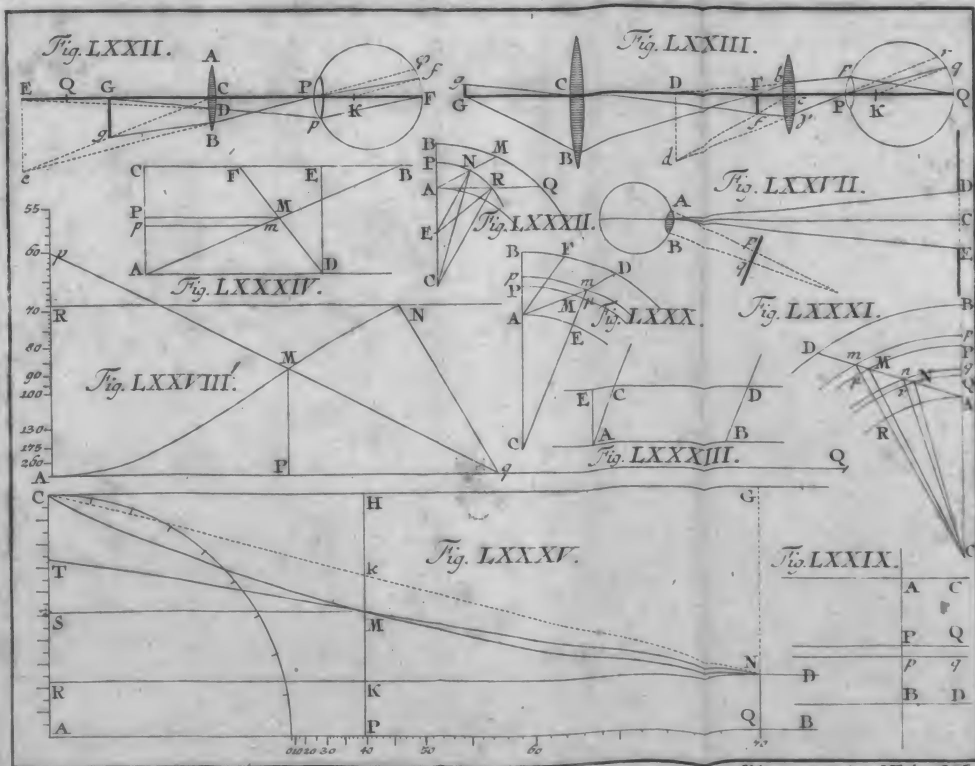

Fig. LXIV.

Photometriae Tab. IIII.



Photometriae Tab. V.





Photometriæ Tab. VI.



Fig. LXXXVI.

Fig. LXXXVII.

Fig. LXXXIX.

Fig. XCIII.

Fig. XC.

Fig. XCI.

Fig. XCII.

Fig. C.

Fig. XCVII.

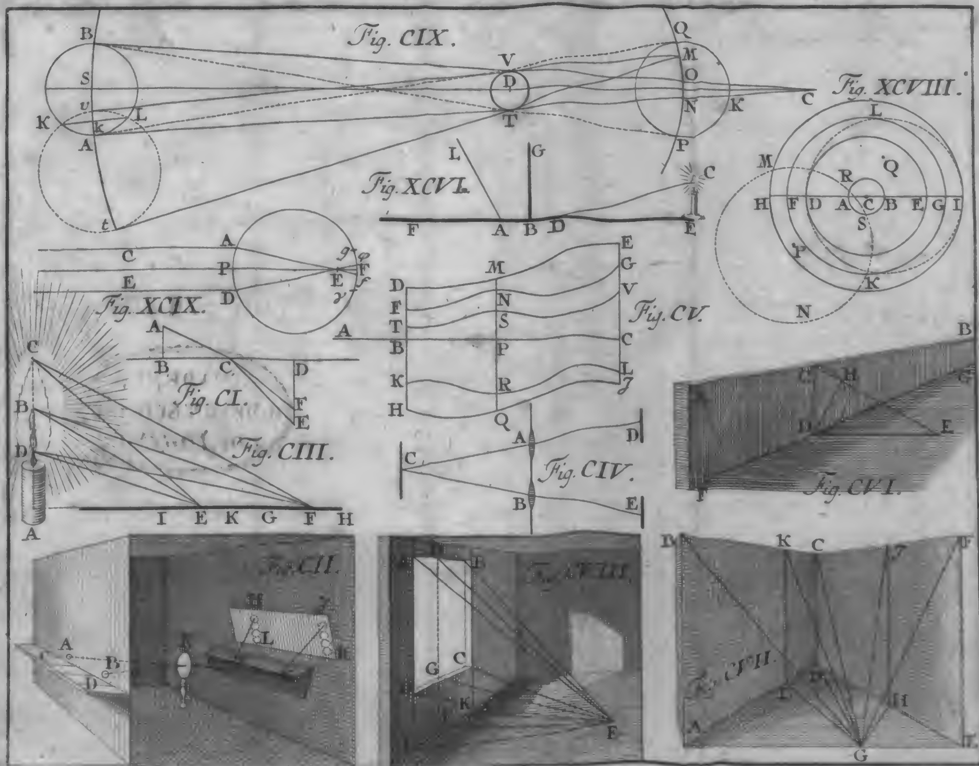
Fig. XCV.

Fig. XCIV.

Fig. XCVI.

Fig. LXXXVIII.





Photometriae Tab. VIII.

